

# TEXTO GUÍA PARA EL CURSO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS 2

JORGE ARLEX GONZÁLEZ LONDOÑO  
**Universidad Tecnológica de Pereira**

JESSER JAMES MARULANDA DURANGO  
**Universidad Tecnológica de Pereira**



TEXTO GUÍA PARA EL CURSO DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS 2

Jorge Arlex González Londoño (joargonzalez@utp.edu.co)

Jesser James Marulanda Durango (jjmarulanda@utp.edu.co)

© 2017

Editorial UTP

# Prólogo

En el siguiente documento encontrará una guía que puede ser consultada durante el curso de circuitos eléctricos 2, visto en el programa de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Tecnológica de Pereira. Ya que esta materia es una de las más importantes en el programa debido a que en ella se aprenden muchas de las técnicas que serán utilizadas en cursos posteriores, además de aportar nuevos conceptos que hasta el momento no se habían introducido en el transcurso de la carrera.

Esta guía recoge de una manera sistemática y coherente lo principal de las clases dictadas por los profesores asignados a la materia; tratando de que al ser consultada, el lector se sienta como si estuviera leyendo sus notas de clase. Una ayuda que resulta útil ya que como estudiantes muchas veces por algún inconveniente, faltamos a una o varias clases perdiendo el hilo del curso llegando así a obtener bajas notas por estas situaciones.

La guía está dividida en 5 capítulos. En el primer capítulo se hará un pequeño repaso de los números complejos que serán muy necesarios durante el transcurso del curso debido a que la mayoría de las operaciones se harán por medio de fasores; seguidamente se mostrara el método fasorial, que consiste en convertir los circuitos eléctricos que están en régimen permanente sinusoidal al dominio de la frecuencia para evitar así la aparición de ecuaciones diferenciales y obtener términos que se puedan solucionar fácilmente con leyes simples como la de Ohm y las de Kirchhoff; en este capítulo también se incluirán algunos métodos de solución de circuitos eléctricos pero utilizando el método fasorial. Además se incluirán algunas operaciones con números complejos en el software matemático Matlab, como una muestra de lo potente que es este entorno para el desarrollo del programa de Ingeniería Eléctrica ya que cuenta con herramientas útiles como la operación de matrices, gráficas, etc. Una de las herramientas que posee este software es Simulink que permite solucionar circuitos eléctricos simulándolos en una interfaz grafica.

Para el segundo capítulo se verá el concepto de potencia tanto en régimen permanente sinusoidal como en el dominio de la frecuencia, también el concepto de valor eficaz o rms y por último como corregir el factor de potencia. El tercer capítulo trata los circuitos trifásicos que es uno de los fuertes del curso ya que hasta el momento no se habían tratado durante el programa, se introducirán conceptos importantes como voltajes de línea y fase, cargas balanceadas y desbalanceadas, secuencia positiva y negativa, cone-

xiones en Y y delta, potencia trifásica, etc. El capítulo 4 trata el tema de circuitos magnéticos y transformadores, donde se solucionan circuitos eléctricos que están acoplados magnéticamente; en el caso del transformador se verán algunos de sus parámetros y la representación del transformador ideal y real en forma circuital. En el capítulo 5 se tratarán los circuitos resonantes y los circuitos filtros que sirven para bloquear frecuencias no deseadas, siendo este una pequeña introducción a cursos posteriores donde se utilizan estos conceptos. Finalmente se ha incluido un apéndice donde se tratan temas que se utilizan en algunos capítulos pero que para no perder coherencia no se incluyen directamente.

Cada capítulo cuenta con ejemplos solucionados paso a paso para que sean entendidos fácilmente complementando lo explicado, además al final de los capítulos se incluyen una serie de ejercicios propuestos los cuales son tomados de parciales hechos en clase, guardando así similitud con lo aprendido en el curso de circuitos eléctricos 2; los ejercicios propuestos tienen su respectiva respuesta para que el estudiante compruebe con éxito, que el procedimiento que utilizó para resolver el ejercicio es el correcto. Algunos de los ejercicios que aparecen en este libro fueron tomados de las notas del ingeniero Julio César Vásquez Ceballos, quien dictó durante mucho tiempo la materia circuitos eléctricos 2, dejando así aportes significativos para el curso. También se incluyó un índice alfabético con algunas palabras clave para que el lector pueda encontrar fácilmente una palabra específica.

Se espera que esta guía sea del agrado del estudiante que realiza el curso de circuitos 2 y le ayude durante el transcurso del mismo para obtener buenas notas en los exámenes, ya que como dice el dicho “la práctica hace al maestro” y si se tienen buenas bases para el estudio, no debe haber excusa para fracasar en el intento. Muchos éxitos en esta materia y en el resto de la carrera.

# Índice general

<b>1. Respuesta estacionaria de circuitos simples con fuentes sinusoidales, usando el método fasorial</b>	<b>1</b>
1.1. Ejemplo introductorio	1
1.2. Repaso de los números complejos	6
1.2.1. Representación gráfica y analítica de un número complejo	6
1.2.2. Operaciones básicas de los números complejos	7
1.2.3. Ejemplos	9
1.2.4. Números complejos en Matlab	12
1.3. Representación en el plano complejo de la función exponencial compleja	14
1.4. Método fasorial	15
1.4.1. Propiedades del método fasorial	15
1.5. Método fasorial para elementos básicos RLC	21
1.5.1. Resistencia:	21
1.5.2. Inductancia	22
1.5.3. Capacitor	23
1.5.4. Impedancia	24
1.5.5. Admitancia	27
1.6. Circuitos serie y paralelo	29
1.6.1. Conexión serie de dipolos	29
1.6.2. Conexión en paralelo de dipolos	30
1.6.3. Divisor de tensión y de corriente	31
1.7. Diagramas fasoriales de redes simples	32
1.8. Métodos para resolver circuitos eléctricos	34
1.8.1. Método de corrientes de malla	34
1.8.2. Método de voltaje de nodos	40
1.8.3. Teorema de Thévenin y Norton	45
1.8.4. Principio de superposición	50
1.9. Método fasorial en Matlab	56
1.10. Ejercicios propuestos	59
<b>2. Potencia en régimen permanente sinusoidal</b>	<b>63</b>
2.1. Potencia instantánea en régimen permanente	63
2.2. Cantidades de potencia	65

2.3.	Potencia para los elementos básicos de circuito . . . . .	65
2.4.	Valor eficaz o rms (root mean squared) de una función periódica . . . . .	67
2.4.1.	Valor promedio de una función periódica: . . . . .	68
2.4.2.	Regulación de voltaje . . . . .	69
2.5.	Potencia compleja . . . . .	70
2.5.1.	Algunas expresiones útiles de la potencia compleja . . . . .	71
2.5.2.	Conservación de la potencia compleja . . . . .	71
2.6.	Corrección del factor de potencia . . . . .	73
2.7.	Ejemplos . . . . .	73
2.8.	Ejercicios propuestos . . . . .	82
<b>3.</b>	<b>Sistemas trifásicos</b> . . . . .	<b>87</b>
3.1.	Sistemas polifásicos . . . . .	87
3.1.1.	Teorema de Millman . . . . .	89
3.1.2.	Sistema monofásico trifilar . . . . .	90
3.2.	Circuitos trifásicos . . . . .	92
3.2.1.	Secuencia positiva (+) ó secuencia <i>abc</i> . . . . .	92
3.2.2.	Secuencia negativa (-) ó secuencia <i>acb</i> . . . . .	93
3.2.3.	Relación entre los voltajes de fase y los voltajes de línea en una fuente de alimentación trifásica balanceada . . . . .	94
3.2.4.	Obtención de los voltajes de línea a partir de los voltajes de fase . . . . .	94
3.3.	Circuito equivalente monofásico ( $1\phi$ ) . . . . .	98
3.4.	Relación de corrientes en una carga conectada en $\Delta$ (triángulo) balanceada . . . . .	100
3.5.	Potencia en sistemas trifásicos . . . . .	103
3.5.1.	Potencia $3\phi$ en una carga conectada en estrella (Y) . . . . .	105
3.5.2.	Potencia $3\phi$ en una carga conectada en triángulo ( $\Delta$ ) . . . . .	105
3.6.	Potencia suministrada por una fuente trifásica . . . . .	107
3.7.	Potencia reactiva $3\phi$ de un banco de condensadores . . . . .	107
3.7.1.	Banco de condensadores en estrella (Y) . . . . .	107
3.7.2.	Banco de condensadores en delta ( $\Delta$ ) . . . . .	108
3.8.	Medición de potencia trifásica . . . . .	116
3.8.1.	Cuando se tiene acceso al neutro de la fuente . . . . .	116
3.8.2.	Cuando se tiene acceso al neutro de la carga . . . . .	117
3.8.3.	Cuando no se tiene acceso al neutro de la fuente ni al neutro de la carga . . . . .	117
3.8.4.	Método de los dos vatímetros . . . . .	118
3.8.5.	Método de los tres vatímetros . . . . .	119
3.9.	Redes trifásicas que actúan como secuencímetros . . . . .	123
3.9.1.	Circuito RC . . . . .	123
3.9.2.	Circuito RCR . . . . .	125
3.10.	Ejercicios propuestos . . . . .	126
<b>4.</b>	<b>Circuitos magnéticos y transformadores</b> . . . . .	<b>133</b>
4.1.	Ecuación fundamental de las máquinas de corriente alterna . . . . .	137
4.2.	Circuito equivalente de dos o más inductancias acopladas . . . . .	137

4.2.1. Obtención de las marcas de polaridad . . . . .	139
4.3. El transformador ideal . . . . .	144
4.3.1. Relación de voltajes y corrientes en el transformador ideal . . . .	145
4.3.2. Circuito equivalente del transformador ideal . . . . .	146
4.3.3. Devanados primario y secundario . . . . .	147
4.3.4. Propiedad de escala de un transformador ideal . . . . .	148
4.4. Teorema de máxima transferencia de potencia . . . . .	150
4.5. Modelo circuital del transformador monofásico lineal . . . . .	157
4.5.1. Cálculo de la relación de transformación ( $a$ ) . . . . .	158
4.5.2. Cálculo de la impedancia de entrada . . . . .	159
4.5.3. Desarrollo del modelo circuital del transformador monofásico co- mercial . . . . .	160
4.6. Circuito equivalente del transformador real . . . . .	163
4.7. Determinación experimental de los parámetros del transformador . . . .	164
4.7.1. Parámetros de la rama de dispersión $R_d$ y $X_d$ . . . . .	164
4.7.2. Parámetros de la rama de excitación $G_c$ y $B_m$ . . . . .	165
4.8. Transformadores en por unidad (p.u) . . . . .	173
4.9. Ejercicios propuestos . . . . .	174
<b>5. Circuitos resonantes y resonancia</b> . . . . .	<b>179</b>
5.1. Resonancia . . . . .	179
5.1.1. Resonancia serie . . . . .	179
5.1.2. Resonancia Paralelo . . . . .	179
5.2. Circuito filtro . . . . .	180
5.2.1. Función de transferencia compleja $\mathbb{H}(w)$ . . . . .	180
5.2.2. Algunos circuitos simples que actúan como filtro . . . . .	181
5.3. Ejercicios propuestos . . . . .	190
<b>A. Transformaciones y teoremas útiles</b> . . . . .	<b>193</b>
A.1. Transformación de fuentes . . . . .	193
A.2. Conversión delta-estrella y estrella-delta . . . . .	194
A.2.1. Conversión de triangulo a estrella . . . . .	194
A.2.2. Conversión de estrella a triangulo . . . . .	194
A.3. Método de Cramer . . . . .	194
A.4. Deducción de las inductancias propias y mutua de dos bobinas que pa- san por un mismo núcleo . . . . .	195
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>196</b>
<b>Índice alfabético</b> . . . . .	<b>197</b>





# 1

## Respuesta estacionaria de circuitos simples con fuentes sinusoidales, usando el método fasorial

### 1.1. Ejemplo introductorio

A continuación se muestra el procedimiento de solución de un circuito eléctrico  $RL$  alimentado por una fuente de voltaje en régimen permanente sinusoidal (figura 1.1). Se determinará una expresión para  $i(t)$  en estado estable.

Siendo:

$$v_S(t) = V_m \cdot \cos(\omega t)$$

Donde  $V_m$  : Valor pico ó amplitud [V]  
 $\omega$  : Frecuencia angular [rad/s]

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff al circuito de la figura:

$$v_L(t) + v_R(t) = v_S(t) \quad (1.1)$$

$v_L(t)$  : Voltaje instantáneo en la inductancia

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad (1.2)$$

$v_R(t)$  : Voltaje instantáneo en la resistencia

$$v_R(t) = R \cdot i(t) \quad (1.3)$$

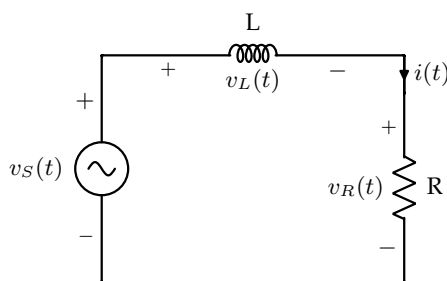


Figura 1.1

Reemplazando (1.2) y (1.3) en (1.1):

$$L \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) = V_m \cdot \cos(\omega t) \quad (1.4)$$

(1.4) es una ecuación diferencial de primer orden, de coeficientes constantes.

**Solución de la ecuación diferencial:** Ignorando las condiciones iniciales del circuito y la respuesta transitoria de la corriente  $i(t)$ , se tiene:

$$i(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (1.5)$$

Se Solucionará por el método de los coeficientes indeterminados (A y B), reemplazando (1.5) en (1.4) se tiene:

$$\begin{aligned} L \frac{d}{dt} [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] + R [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] &= V_m \cdot \cos(\omega t) \\ A\omega L \cos(\omega t) - B\omega L \sin(\omega t) + AR \sin(\omega t) + BR \cos(\omega t) &= V_m \cdot \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A\omega L + BR = V_m \quad (1.6)$$

$$-B\omega L + AR = 0 \quad (1.7)$$

De (1.7) se tiene:

$$\begin{aligned} AR &= B\omega L \\ A &= B \cdot \frac{\omega L}{R} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Reemplazando (1.8) en (1.6):

$$\begin{aligned} B \cdot \frac{\omega L}{R} \cdot \omega L + BR &= V_m \\ B [R^2 + (\omega L)^2] &= V_m \cdot R \\ B &= \frac{V_m \cdot R}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Reemplazando (1.9) en (1.8):

$$\begin{aligned} A &= \frac{V_m \cdot R}{R^2 + (\omega L)^2} \cdot \frac{\omega L}{R} \\ A &= \frac{V_m \cdot \omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Reemplazando (1.9) y (1.10) en (1.5):

$$i(t) = \frac{V_m \cdot wL}{R^2 + (wL)^2} \cdot \sin(wt) + \frac{V_m \cdot R}{R^2 + (wL)^2} \cdot \cos(wt) \quad (1.11)$$

La corriente  $i(t)$  se puede expresar como:

$$i(t) = I_m \cdot \cos(wt + \phi) \quad (1.12)$$

Donde:

$I_m$  : Valor pico de la corriente ó amplitud

$w$  : Frecuencia angular que es igual a la frecuencia angular de  $v_S(t)$

$\phi$  : Angulo de fase

• **Determinando  $I_m$  y  $\phi$**

De la ecuación (1.12) se tiene:

$$i(t) = I_m [\cos(wt) \cdot \cos \phi - \sin(wt) \cdot \sin \phi]$$

$$i(t) = -I_m \sin \phi \cdot \sin(wt) + I_m \cos \phi \cdot \cos(wt) \quad (1.13)$$

Comparando (1.11) y (1.13):

$$-I_m \sin \phi = \frac{V_m \cdot wL}{R^2 + (wL)^2} \quad , \quad I_m \cos \phi = \frac{V_m \cdot R}{R^2 + (wL)^2}$$

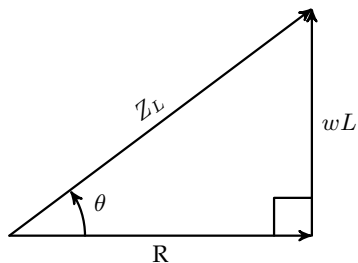
⊙ Para determinar  $I_m$ :

$$(-I_m \sin \phi)^2 + (I_m \cos \phi)^2 = \left( \frac{V_m \cdot wL}{R^2 + (wL)^2} \right)^2 + \left( \frac{V_m \cdot R}{R^2 + (wL)^2} \right)^2$$

$$I_m^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = V_m^2 \cdot \frac{R^2 + (wL)^2}{(R^2 + (wL)^2)^2}$$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (wL)^2}} \quad (1.14)$$

De  $\sqrt{R^2 + (wL)^2}$  se puede deducir que:



$Z_L$ : Impedancia del circuito vista por la fuente.

$\theta$ : Angulo de la impedancia vista por la fuente.

Entonces:  $Z_L = \sqrt{R^2 + (wL)^2}$

Luego:  $I_m = \frac{V_m}{Z_L}$

Donde:  $I_m \equiv [A]$ ,  $V_m \equiv [V]$ ,  $Z_L \equiv [\Omega]$

⊙ Para determinar  $\phi$ :

$$\frac{-I_m \cdot \sin \phi}{I_m \cdot \cos \phi} = \frac{wL}{R}$$

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = -\frac{wL}{R}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \left( \frac{wL}{R} \right) \quad (1.15)$$

Reemplazando (1.14) y (1.15) en (1.12):

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (wL)^2}} \cdot \cos \left( wt - \tan^{-1} \left( \frac{wL}{R} \right) \right)$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(wt - \phi)$$

⊙ Determinando  $v_R(t)$  y  $v_L(t)$ :

De la ecuación (1.3):

$$v_R(t) = R \cdot i(t) = R \cdot I_m \cos(wt - \theta)$$

$$v_R(t) = R \cdot I_m \cos(wt - \theta)$$

Nótese que:

1. La amplitud de la forma de onda  $v_R(t)$  es igual a:

$$V_{Rm} = R \cdot I_m \quad (\text{ley de ohm})$$

2. La frecuencia angular del voltaje en la resistencia  $v_R(t)$  es la misma frecuencia angular de  $v_S(t)$  e  $i(t)$ .
3. El ángulo de fase de  $v_R(t)$  es el mismo ángulo de fase de  $i(t)$ . (Se dice que  $v_R(t)$  e  $i(t)$  están en fase)

De la ecuación (1.2):

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} (I_m \cdot \cos(\omega t - \theta))$$

$$v_L(t) = \omega L \cdot I_m [-\sin(\omega t - \theta)]$$

Recordando que:  $\sin x = \cos(x - 90)$  y  $-\cos x = \cos(x \pm 180)$

Luego:

$$-\sin(\omega t - \theta) = -\cos(\omega t - \theta - 90)$$

$$-\sin(\omega t - \theta) = \cos(\omega t - \theta + 90)$$

Teniendo que:

$$v_L(t) = \omega L \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - \theta + 90)$$

Nótese que:

1. La amplitud de la forma de onda  $v_L(t)$  es:

$$V_{Lm} = (\omega L) \cdot I_m = X_L \cdot I_m \quad , \quad X_L = \omega L [\Omega]$$

2. La frecuencia angular del voltaje en la inductancia  $v_L(t)$  es la misma frecuencia angular de la fuente  $v_S(t)$ .
3. El ángulo de fase de  $v_L(t)$  es el igual al ángulo de fase de la corriente  $i(t)$  más  $90^\circ$ . Se dice que  $v_L(t)$  adelanta  $90^\circ$  a su corriente.

### Conclusiones:

1. Todas las formas de onda del circuito (voltajes y corrientes) tienen la *misma frecuencia angular* ( $\omega$ ) que la función forzante sinusoidal  $v_S(t)$ .
2. Las respuestas estacionarias del circuito (voltajes y corrientes) son *funciones sinusoidales* de la forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{donde } x(t) \text{ puede ser } v(t) \text{ ó } i(t)$$

3. Con base en lo anterior, se conoce la forma de las respuestas estacionarias del circuito y por lo tanto, la solución "simplemente" implica determinar los valores de los parámetros  $A$  y  $\phi$ .

## 1.2. Repaso de los números complejos

El método fasorial empleado en el análisis de circuitos en régimen permanente sinusoidal implica el manejo de cantidades complejas, por lo que se hará un repaso de las propiedades de los números complejos.

### 1.2.1. Representación gráfica y analítica de un número complejo

Recordemos que:  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  Siendo:  $j = \sqrt{-1}$  Definida como la unidad imaginaria.

Para indicar un número complejo se utiliza una letra con doble raya, por ejemplo:  $\mathbb{Z}$ ; pudiéndose representar en un plano cartesiano, donde el eje X es el eje real y el eje Y es el eje imaginario.

Para caracterizar el número complejo  $\mathbb{Z}$ , se utilizan las coordenadas en el plano correspondiente al número complejo. Se dice que  $\mathbb{Z}$  tiene una parte real que se denota como  $Re\{\mathbb{Z}\}$  y una parte imaginaria que se denota como  $Im\{\mathbb{Z}\}$ , con base en la figura 1.2 se tiene que:

$$Re\{\mathbb{Z}\} = a$$

$$Im\{\mathbb{Z}\} = b$$

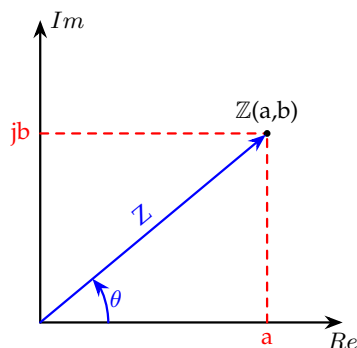


Figura 1.2. Representación cartesiana de un número complejo

Otra forma de caracterizar el número complejo  $\mathbb{Z}$ , es utilizar las coordenadas polares del punto en el plano complejo asociado al número complejo.

El número complejo  $\mathbb{Z}$  tiene una magnitud igual a  $Z$  y un ángulo  $\theta$  medido a partir del eje real, pudiéndose representar de manera analítica con alguna de las siguientes formas:

Representación cartesiana:  $\mathbb{Z} = a + jb$

Coordenadas cartesianas

Representación polar:  $\mathbb{Z} = Z \angle \theta$

Coordenadas polares

De los números complejos se puede decir que:

► La magnitud de  $\mathbb{Z}$  ( $Z$ ) es una cantidad real positiva.

►  $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$

►  $\theta$  es positivo en sentido anti-horario o a partir del eje real.

►  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$

►  $\mathbb{Z} = Z [\cos(\theta) + j \sin(\theta)]$

Representación trigonométrica

►  $\mathbb{Z} = Z e^{j\theta}$

Representación exponencial

►  $Re\{\mathbb{Z}\} = Z \cos \theta$

Proyección del número complejo sobre el eje real

►  $Im\{\mathbb{Z}\} = Z \sin \theta$

Proyección del número complejo sobre el eje imaginario

### 1.2.2. Operaciones básicas de los números complejos

#### Suma

La suma de dos o más números complejos se puede realizar de forma gráfica y de forma analítica, dando como resultado otro número complejo. La suma gráfica se realiza de igual manera que una suma de vectores.

Por ejemplo si se suman dos números complejos  $Z_1$  y  $Z_2$  el resultado es un número complejo  $Z_3$ .

$$Z_3 = Z_1 + Z_2$$

Donde:

$$\text{Re}\{Z_3\} = \text{Re}\{Z_1\} + \text{Re}\{Z_2\}$$

$$\text{Im}\{Z_3\} = \text{Im}\{Z_1\} + \text{Im}\{Z_2\}$$

$$Z_3 = \sqrt{\text{Re}^2\{Z_3\} + \text{Im}^2\{Z_3\}}$$

$$Z_3 = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{b+d}{a+c} \right)$$

Al usar la ley del coseno<sup>1</sup> se tiene:

$$Z_3^2 = Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_1Z_2 \cos [180 - (\theta_2 - \theta_1)]$$

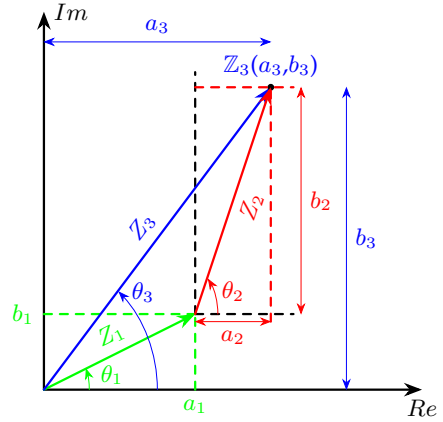
De lo anterior se puede deducir dos casos particulares:

1. Complejos en fase:  $\theta_1 = \theta_2$

Se tiene que:  $Z_3 = Z_1 + Z_2$

2. Complejos en contra-fase:  $\theta_2 = \theta_1 \pm 180$

Se tiene que:  $Z_3 = |Z_1 - Z_2|$  y  $\theta_3 = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } Z_1 > Z_2 \\ \theta_2 & \text{si } Z_1 < Z_2 \end{cases}$



**Figura 1.3.** Representación gráfica de la suma de dos números complejos

#### Multiplicación

Siendo:  $Z_1 = a_1 + jb_1$  y  $Z_2 = a_2 + jb_2$

Multiplicándolos se tiene:

$$Z_3 = Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2)$$

$$Z_3 = a_1a_2 + ja_1b_2 + jb_1a_2 + j^2b_1b_2$$

$$Z_3 = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + b_1a_2)$$

<sup>1</sup> $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

También se puede resolver utilizando representación polar; si  $Z_1 = Z_1 \angle \theta_1$  y  $Z_2 = Z_2 \angle \theta_2$  el resultado de la multiplicación es:

$$\begin{aligned} Z_3 &= Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \angle \theta_1 \cdot Z_2 \angle \theta_2 \\ Z_3 &= Z_1 \cdot e^{j\theta_1} * Z_2 \cdot e^{j\theta_2} = Z_1 Z_2 \cdot e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ Z_3 &= Z_3 \angle \theta_3 \end{aligned}$$

$$Z_3 = Z_1 \cdot Z_2$$

La magnitud resultante es el producto de las magnitudes.

$$\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$$

El ángulo fase resultante es la suma de los ángulos fases.

### División

Tomando los números complejos en forma exponencial:

$$Z_1 = Z_1 \cdot e^{j\theta_1} \quad \text{y} \quad Z_2 = Z_2 \cdot e^{j\theta_2}$$

Al hacer la división

$$Z_3 = \frac{Z_1}{Z_2}$$

Se obtiene:

$$Z_3 = \frac{Z_1 \cdot e^{j\theta_1}}{Z_2 \cdot e^{j\theta_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

Donde:

$$\begin{aligned} Z_3 &= \frac{Z_1}{Z_2} \quad (Z_2 \neq 0) \\ \theta_3 &= \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

### Conjugado de un número complejo

Sea el número complejo:

$$Z = a + jb = Z \angle \theta$$

El conjugado de  $Z$  que se denota como  $Z^*$  es igual a:

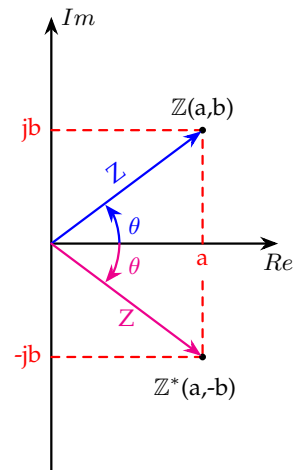
$$Z^* = a - jb = Z \angle -\theta$$

Nótese que:

$$Z \cdot Z^* = Z \cdot e^{j\theta} * Z \cdot e^{-j\theta} = Z^2 \cdot e^{j(\theta - \theta)}$$

entonces:

$$Z \cdot Z^* = Z^2$$



**Figura 1.4.** Representación gráfica del conjugado de un número complejo



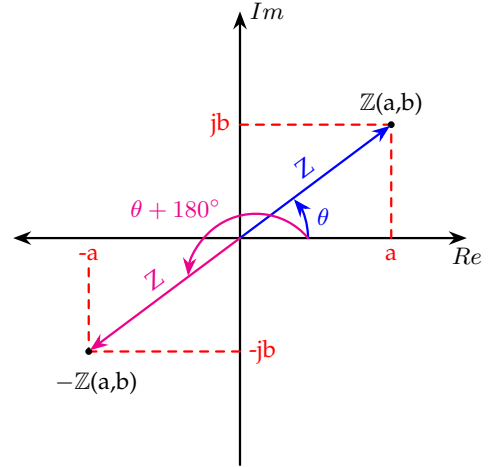
### Negativo de un número complejo

Sea el número complejo:

$$\mathbb{Z} = a + jb = \mathbb{Z} \angle \theta$$

El negativo de  $\mathbb{Z}$  que se escribe  $-\mathbb{Z}$  es igual a:

$$-\mathbb{Z} = -a - jb = \mathbb{Z} \angle (\theta + 180^\circ)$$



**Figura 1.5.** Representación gráfica del negativo de un número complejo

### Inverso de un número complejo

El inverso o recíproco de :  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cdot e^{j\theta}$

es: 
$$\frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{\mathbb{Z} \cdot e^{j\theta}} = \frac{1}{\mathbb{Z}} \cdot e^{-j\theta}$$

### 1.2.3. Ejemplos

#### Ejemplo 1.1

Sean  $\mathbb{Z}_1 = 10 \angle 60^\circ$  y  $\mathbb{Z}_2 = 5 \angle 30^\circ$ , calcular:  $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2$

**Solución:**

$$\mathbb{Z}_3 = (10 \angle 60^\circ) + (5 \angle 30^\circ)$$

Pasando  $\mathbb{Z}_1$  y  $\mathbb{Z}_2$  a su forma polar:

$$10 \angle 60^\circ = 10 \cos(60^\circ) + j10 \sin(60^\circ) = 5 + j5\sqrt{3}$$

$$5 \angle 30^\circ = 5 \cos(30^\circ) + j5 \sin(30^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2} + j2,5$$

Haciendo la suma se tiene:

$$\mathbb{Z}_3 = 5 + j5\sqrt{3} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + j2,5$$

$$\mathbb{Z}_3 = 5 + \frac{5\sqrt{3}}{2} + j(5\sqrt{3} + 2,5)$$

De lo anterior obtenemos:

$$\mathbb{Z}_3 = 9,33 + j11,16$$

Representado en forma cartesiana

$$\mathbb{Z}_3 = 14,54 \angle 50,1^\circ$$

Representado en forma polar

Nótese que la magnitud de  $Z_3$  es diferente que la suma de las magnitudes de  $Z_1$  y  $Z_2$

$$Z_3 \neq Z_1 + Z_2$$

Resolviendo el ejercicio de manera gráfica:

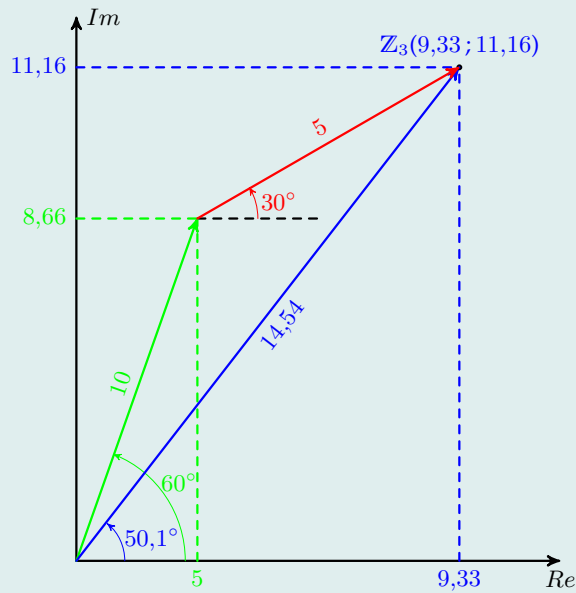


Figura 1.6. Solución gráfica del ejemplo 1.1

### Ejemplo 1.2

Sea la ecuación compleja:

$$50 \angle \theta_3 = Z_1 \angle 30^\circ + 20 \angle 60^\circ \quad (1.16)$$

Calcular  $Z_1$  y  $\theta_3$  que satisfagan la ecuación.

**Solución:** De los números complejos de la ecuación, se sacan su parte real e imaginaria obteniendo un sistema de ecuaciones no lineal:

Parte real:

$$50 \cdot \cos \theta_3 = Z_1 \cdot \cos 30^\circ + 20 \cdot \cos 60^\circ$$

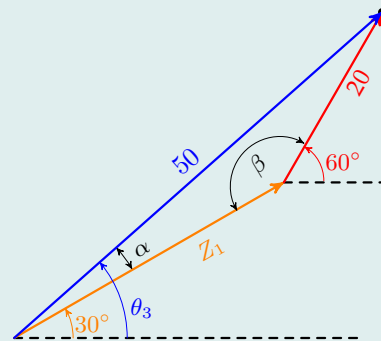


Figura 1.7. Representación de la ecuación 1.16 en forma gráfica

Parte Imaginaria:  $50 \cdot \sin \theta_3 = Z_1 \cdot \sin 30^\circ + 20 \cdot \sin 60^\circ$

Este sistema de ecuaciones no lineal se puede resolver por medio de diferentes técnicas; en nuestro caso se resolverá de la siguiente manera:

Se elevan ambas ecuaciones al cuadrado así:

$$[50 \cdot \cos(\theta_3)]^2 = [Z_1 \cdot \cos(30^\circ) + 20 \cdot \cos(60^\circ)]^2 \quad (1.17)$$

$$[50 \cdot \sin(\theta_3)]^2 = [Z_1 \cdot \sin(30^\circ) + 20 \cdot \sin(60^\circ)]^2 \quad (1.18)$$

Elevando al cuadrado y sumando (1.2) con (1.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} 50^2 \cdot \cos^2(\theta_3) + 50^2 \cdot \sin^2(\theta_3) &= Z_1^2 \cdot \cos^2(30^\circ) + 2 \cdot 20 \cdot Z_1 \cdot \cos(30^\circ) \cdot \cos(60^\circ) \\ &+ 20^2 \cdot \cos^2(60^\circ) + Z_1^2 \cdot \sin^2(30^\circ) \\ &+ 2 \cdot 20 \cdot Z_1 \cdot \sin(30^\circ) \cdot \sin(60^\circ) \\ &+ 20^2 \cdot \sin^2(60^\circ) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Luego:

$$50^2 = Z_1^2 + 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot Z_1 [\cos(30^\circ) \cdot \cos(60^\circ) + \sin(30^\circ) \cdot \sin(60^\circ)]$$

Al aplicar una identidad trigonométrica  $[\cos(a - b) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)]$  se tiene:

$$50^2 = Z_1^2 + 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot Z_1 \cdot \cos(30^\circ - 60^\circ) \quad (1.20)$$

Se sabe que  $\cos(\theta \pm 180) = -\cos(\theta)$ , al reemplazar en (1.5) se obtiene:

$$50^2 = Z_1^2 + 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot Z_1 \cdot \cos[180 - (60 - 30)] \quad (1.21)$$

De la ecuación (1.6) se puede observar que se parece mucho a la ley del coseno; despejando (En este caso se utilizara la formula:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ )  $Z_1$  se encuentra que:

$$\boxed{Z_1 = 31,67}$$

Para hallar los ángulos de la figura 1.16, se utiliza la ley del seno ( $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$ ); sabiendo de la ecuación (1.6) que  $\beta = 150^\circ$  se puede hallar el ángulo  $\alpha$  así:

$$\frac{20}{\sin(\alpha)} = \frac{50}{\sin(150^\circ)} \quad (1.22)$$

De (1.7) se tiene que:  $\alpha = 11,54^\circ$

Por lo tanto:  $\theta_3 = 30^\circ + \alpha \implies \boxed{\theta_3 = 41,54^\circ}$

### 1.2.4. Números complejos en Matlab

[7] Por defecto, Matlab solo acepta números complejos en forma rectangular. Se usa  $i$  o  $j$  para representar el número imaginario  $\sqrt{-1}$ .

Por ejemplo, ingresando un número imaginario en Matlab:

```
1 >> 5+4j
2 ans =
3      5.0000 + 4.0000i
```

Matlab utiliza los ángulos en radianes, por tal razón es conveniente definir una función de conversión radian/grado como la siguiente:

```
1 >> gar = @(x)(x*pi/180);      %Función para convertir de grados a radianes.
2
3 >> rag = @(x)(x*180/pi);      %Función para convertir de radianes a grados.
```

Si se quiere pasar  $60^\circ$  a radianes se escribe:

```
1 >> gar(60)
2 ans =
3      1.0472
```

Si se quiere pasar 0,7854 radianes a grados se escribe:

```
1 >> rag(0.7854)
2 ans =
3      45.0001
```

Para ingresar un número imaginario en forma polar, se utiliza la representación exponencial teniendo en cuenta que el ángulo debe ir en radianes; por ejemplo, para representar el número imaginario  $2\angle 45^\circ$  en Matlab se escribe:

```
1 >> x = 2*exp(j*gar(45))
2 x =
3      1.4142 + 1.4142i
```

Nótese que la respuesta está en forma cartesiana.

Si se quiere encontrar la magnitud y el ángulo de un número imaginario se escribe:

```
1 >> [abs(x) rag(angle(x)) ]
2 ans =
3      2      45
```

Resolviendo el ejemplo 1.1 con Matlab se tiene:

```
1 >> Z1 = 10*exp(j*gar(60))
2 Z1 =
3      5.0000 + 8.6603i
4
5 >> Z2 = 5*exp(j*gar(30))
6 Z2 =
```

```

7      4.3301 + 2.5000 i
8
9 >> Z3 = Z1 + Z2
10 Z3 =
11      9.3301 +11.1603 i
12
13 >> [abs(Z3) rag(angle(Z3))]
14 ans =
15      14.5466      50.1039

```

Resolviendo el ejemplo 1.2 con matlab se tiene:

Se definen las variables de la ecuación

```

1 >> syms theta3 Z1

```

Se pasan los grados a radianes

```

1 >> gar(30)
2 ans =
3      0.5236
4 >> gar(60)
5 ans =
6      1.0472

```

Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido de sacar la parte real e imaginaria de la ecuación compleja, por medio del comando *solver*

```

1 >> [Z1, theta3]=solve('50*cos(theta3)=Z1*cos(0.5236)+20*cos(1.0472)', '50*sin(theta3)=Z1*sin(0.5236)+20*sin(1.0472)')
2 Z1 =
3      -66.310286358405360313067538432785
4      31.669294695087803179529907859813
5 theta3 =
6      -2.8193510072713630299947793878484
7      0.72495835368156979153213600456888

```

Se convierten los valores de theta3 a grados

```

1 >> rag(theta3)
2 ans =
3      -507.48318130884534539906028981271/pi
4      130.4925036626825624757844808224/pi

```

Se obtienen dos valores de theta3:  $-161,53^\circ$  y  $41,53^\circ$ ; como  $Z1 = 31,67$  ya que la magnitud de un vector no puede ser negativa, el valor de  $\theta_3$  que satisface la ecuación es:  $\theta_3 = 41,53^\circ$

### 1.3. Representación en el plano complejo de la función exponencial compleja

Supongamos la siguiente función compleja:

$$v(t) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}$$

Donde:

$$\mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta} = V_m \angle \theta$$

Las unidades de las ecuaciones anteriores son:

$V_m \equiv [V]$	Voltios
$\theta \equiv [^\circ]$	Grados
$\omega \equiv [rad/seg]$	Frecuencia angular

Nótese que:

$$\omega \cdot t = \frac{rad}{seg} \cdot seg = rad \quad \text{ángulo en radianes}$$

Se desea graficar la función compleja  $v(t)$  en el plano complejo:

► Para  $t = 0seg$

$$v(0) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega 0} = \mathbb{V} = V_m \angle \theta$$

► Para  $t = t_1$ , donde  $t_1 > 0 seg$

$$v(t_1) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t_1} = V_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t_1} = V_m \cdot e^{j(\theta + \theta_1)} = V_m \angle \theta + \theta_1$$

donde  $\theta_1 = \omega \cdot t_1$

► Para  $t = t_2$ , donde  $t_2 > t_1$

$$v(t_2) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t_2} = V_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t_2} = V_m \cdot e^{j(\theta + \theta_2)} = V_m \angle \theta + \theta_2$$

donde  $\theta_2 = \omega \cdot t_2$  y  $\theta_2 > \theta_1$

► Para  $t = t_3$ , donde  $t_3 = \frac{2\pi}{\omega}$

$$v(t_3) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t_3} = V_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega \frac{2\pi}{\omega}} = V_m \cdot e^{j\theta} \cdot \underbrace{e^{j2\pi}}_1 = V_m \cdot e^{j\theta} = V_m \angle \theta$$

repitiéndose de nuevo  $V_m \angle \theta$

Graficando los valores anteriores en el plano complejo se tiene:

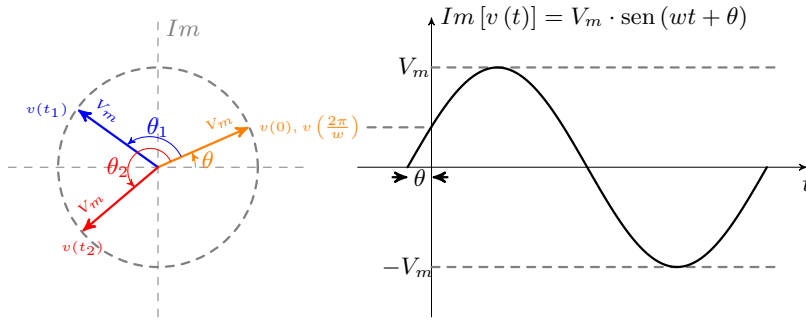


Figura 1.8. Representación gráfica de la función exponencial compleja

De igual manera se puede hacer la gráfica en el plano real.

Nótese que:

$$v(t) = \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} = V_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t} = V_m \cdot e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$v(t) = \underbrace{V_m \cos(\omega t + \theta)}_{\text{Parte real}} + j \underbrace{V_m \sin(\omega t + \theta)}_{\text{Parte imaginaria}}$$

De lo anterior se puede decir que un **fasor** es un vector que gira en el plano complejo con una frecuencia angular  $\omega$ .

## 1.4. Método fasorial

Se aplica a los circuitos eléctricos alimentados por fuentes sinusoidales o cosenoidales (sean de voltaje o de corriente) de la misma frecuencia; dichos circuitos deben ser:

- Lineales
- Invariantes en el tiempo
- En régimen permanente

Mediante este método se pueden solucionar más rápido estos circuitos que a través del tiempo. Como se busca la respuesta en régimen permanente, se desprecian o se asumen nulas las condiciones iniciales.

### 1.4.1. Propiedades del método fasorial

#### a. Linealidad

Sean  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  dos funciones complejas,  $K_1$  y  $K_2$  dos constantes, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Re}[K_1 \cdot v_1(t) + K_2 \cdot v_2(t)] &= K_1 \cdot \text{Re}[v_1(t)] + K_2 \cdot \text{Re}[v_2(t)] \\ \text{Im}[K_1 \cdot v_1(t) + K_2 \cdot v_2(t)] &= K_1 \cdot \text{Im}[v_1(t)] + K_2 \cdot \text{Im}[v_2(t)] \end{aligned}$$

**b. Derivada**

Sea la función compleja  $v_1(t)$  de la forma:  $v_1(t) = \mathbb{V} \cdot e^{jwt}$ , donde  $\mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta}$  entonces la derivada de  $v_1(t)$  con respecto al tiempo es:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v_1(t) &= \frac{d}{dt}\mathbb{V} \cdot e^{jwt} = \mathbb{V} \cdot \frac{d}{dt}e^{jwt} = (jw) \cdot \mathbb{V} \cdot e^{jwt} \\ \frac{d}{dt}v_1(t) &= (jw) \cdot v_1(t)\end{aligned}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_1(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}v_1(t)\right] = \frac{d}{dt}(jw) \cdot v_1(t) = jw \cdot \frac{d}{dt}v_1(t) = (jw)^2 \cdot v_1(t)$$

La n-ésima derivada es:

$$\frac{d^n}{dt^n}v_1(t) = (jw)^n \cdot v_1(t)$$

**Ejemplo 1.3:** Obtener la derivada de  $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$  usando la propiedad de derivada del método fasorial.

**Solución:**  $v(t) = \text{Im} [\mathbb{V} \cdot e^{jwt}]$ , donde  $\mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta}$

Cálculo de la derivada:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}v(t) &= \frac{d}{dt}\text{Im} [\mathbb{V} \cdot e^{jwt}] = \text{Im} \left[ \frac{d}{dt}\mathbb{V} \cdot e^{jwt} \right] \\ \frac{d}{dt}v(t) &= \text{Im} [(jwt) \cdot \mathbb{V} \cdot e^{jwt}] \quad \text{siendo} \quad j = 1 \angle 90^\circ = e^{j90} \\ \frac{d}{dt}v(t) &= \text{Im} [e^{j90} \cdot w \cdot V_m \cdot e^{j\theta} \cdot e^{jwt}] = \text{Im} [w \cdot V_m \cdot e^{j(\omega t + \theta + 90)}] \\ \frac{d}{dt}v(t) &= \text{Im} [w \cdot V_m \cdot e^{j(\omega t + \theta + 90)}] = w \cdot V_m \cdot \text{Im} [e^{j(\omega t + \theta + 90)}] \\ \frac{d}{dt}v(t) &= w \cdot V_m \cdot \text{Im} [\cos(\omega t + \theta + 90) + \sin(\omega t + \theta + 90)] \\ \frac{d}{dt}v(t) &= w \cdot V_m \cdot \sin(\omega t + \theta + 90) \\ \frac{d}{dt}v(t) &= w \cdot V_m \cdot \cos(\omega t + \theta)\end{aligned}$$

**c. Igualdad**

Sean  $v_1(t)$  y  $v_2(t)$  dos funciones complejas de la forma:

$$v_1(t) = \mathbb{A} \cdot e^{jwt}, \quad v_2(t) = \mathbb{B} \cdot e^{jwt}$$



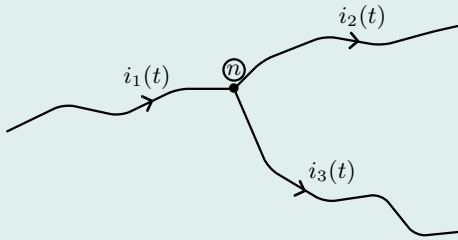
$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[v_1(t)] = \operatorname{Re}[v_2(t)] &\implies \operatorname{Re}[\mathbb{A} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{B} \cdot e^{j\omega t}] &\implies \mathbb{A} = \mathbb{B} \\ \operatorname{Im}[v_1(t)] = \operatorname{Im}[v_2(t)] &\implies \operatorname{Im}[\mathbb{A} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Im}[\mathbb{B} \cdot e^{j\omega t}] &\implies \mathbb{A} = \mathbb{B} \end{aligned}$$

#### d. Propiedad fundamental

La suma de cualquier cantidad de sinusoides de la *misma frecuencia*, es otra senoide de la misma frecuencia.

**Ejemplo 1.4:** Aplicación a las leyes de Kirchhoff.

• Ley de corrientes de Kirchhoff:



Suponiendo que:

$$i_1(t) = I_1 \cdot \cos(\omega t + \theta_1)$$

$$i_2(t) = I_2 \cdot \cos(\omega t + \theta_2)$$

$$i_3(t) = I_3 \cdot \cos(\omega t + \theta_3)$$

**Figura 1.9.** Representación de la ley de corrientes de Kirchhoff

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) \quad (1.23)$$

Usando la siguiente notación para las corrientes:

$$i_1(t) = \operatorname{Re}[I_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t}]$$

$$i_2(t) = \operatorname{Re}[I_2 \cdot e^{j\theta_2} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t}]$$

$$i_3(t) = \operatorname{Re}[I_3 \cdot e^{j\theta_3} \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{I}_3 \cdot e^{j\omega t}]$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la ecuación (1.8):

$$\operatorname{Re}[\mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t}] + \operatorname{Re}[\mathbb{I}_3 \cdot e^{j\omega t}]$$

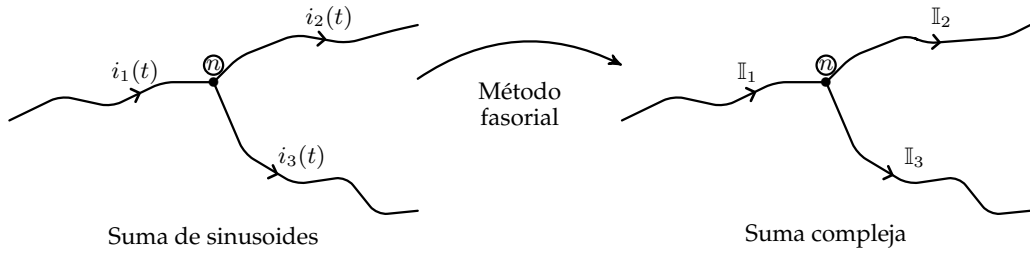
Aplicando la propiedad de linealidad:

$$\operatorname{Re}[\mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[\mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} + \mathbb{I}_3 \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\operatorname{Re}[\mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[(\mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3) \cdot e^{j\omega t}]$$

Aplicando la propiedad de igualdad:

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3$$



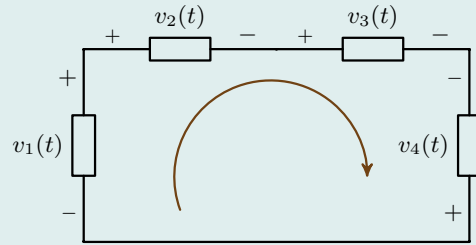
**Figura 1.10.** Método fasorial aplicado a la ley de corrientes de Kirchhoff

**Ejemplo 1.5:** Determinar el voltaje  $v_2(t)$  en el circuito de la figura si:

$$v_1(t) = 50 \cdot \cos(\omega t + 30)$$

$$v_3(t) = 30 \cdot \sin(\omega t - 30)$$

$$v_4(t) = 80 \cdot \sin(\omega t + 40)$$



**Solución:** Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff:

$$v_2(t) = v_1(t) + v_4(t) - v_3(t) \quad (1.24)$$

Donde:

$$v_1(t) = 50 \cdot \cos(\omega t + 30) = \text{Re} [50 \cdot e^{j30} \cdot e^{j\omega t}] \quad (1.25)$$

$$v_2(t) = 30 \cdot \sin(\omega t - 30) = \text{Im} [30 \cdot e^{-j30} \cdot e^{j\omega t}] \quad (1.26)$$

$$v_3(t) = 80 \cdot \sin(\omega t + 40) = \text{Im} [80 \cdot e^{j40} \cdot e^{j\omega t}] \quad (1.27)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.10)(1.11) y (1.12) en (1.9) se tiene:

$$v_2(t) = \text{Re} [50 \cdot e^{j30} \cdot e^{j\omega t}] - \text{Im} [30 \cdot e^{-j30} \cdot e^{j\omega t}] + \text{Im} [80 \cdot e^{j40} \cdot e^{j\omega t}]$$

Para aplicar la propiedad de linealidad, se hace lo siguiente [ Tomando que:  $\cos(x) = \sin(x + 90)$  ]:

$$v_1(t) = 50 \cdot \cos(\omega t + 30) = 50 \cdot \sin(\omega t + 30 + 90) = 50 \cdot \sin(\omega t + 120) = \text{Im} [50 \cdot e^{j120} \cdot e^{j\omega t}]$$

Aplicando la propiedad fundamental del método fasorial:

$$v_2(t) = V_2 \cdot \sin(\omega t + \theta_2) = \text{Im} [V_2 \cdot e^{j\theta_2} \cdot e^{j\omega t}]$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} [\mathbb{V}_2 \cdot e^{j\omega t}] &= \operatorname{Im} [50 \cdot e^{j120} \cdot e^{j\omega t}] - \operatorname{Im} [30 \cdot e^{-j30} \cdot e^{j\omega t}] + \operatorname{Im} [80 \cdot e^{j40} \cdot e^{j\omega t}] \\ \operatorname{Im} [\mathbb{V}_2 \cdot e^{j\omega t}] &= \operatorname{Im} [(50 \cdot e^{j120} - 30 \cdot e^{-j30} + 80 \cdot e^{j40}) \cdot e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}_2 = 50 \cdot e^{j120} - 30 \cdot e^{-j30} + 80 \cdot e^{j40}$$

$$\mathbb{V}_2 = 110,21 \angle 84,63^\circ$$

De  $\mathbb{V}_2$  se puede decir que:  $V_2 = 110,21$  y  $\theta_2 = 84,63$

Luego:

$$v_2(t) = 110,21 \cdot \sin(\omega t + 84,63)$$

A continuación se muestra la aplicación del método fasorial a un circuito simple de dos mallas.

**Ejemplo 1.6:** Suponiendo que el circuito de la figura está en régimen permanente, describir el circuito usando como incógnitas las corrientes de las mallas si:

$$v(t) = V \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

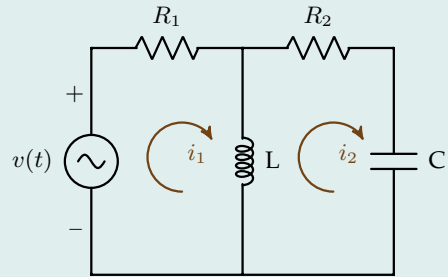
**Solución:**

Si el circuito cumple las condiciones del método fasorial, se conoce la forma de la respuesta de las corrientes  $i_1$  e  $i_2$

$$i_1(t) = I_1 \cdot \cos(\omega t + \theta_1) \text{ A}$$

$$i_2(t) = I_2 \cdot \cos(\omega t + \theta_2) \text{ A}$$

Incógnitas  $\{ I_1, \theta_1, I_2, \theta_2 \}$



$$\begin{aligned} \sum \mathbb{V}_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 \cdot i_1 + L \frac{d}{dt} (i_1 - i_2) = V(t) \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\sum \mathbb{V}_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 \cdot i_2 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_2(x) dx + i(t_0) + L \frac{d}{dt} (i_2 - i_1) = 0 \quad (1.29)$$

derivando la ecuación (1.29) respecto al tiempo:

$$R_2 \frac{d}{dt} i_2 + \frac{1}{C} i_2 + L \frac{d^2}{dt^2} (i_2 - i_1) = 0 \quad (1.30)$$

se puede decir que:

$$i_1(t) = \text{Re} \{ I_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} \quad \text{con} \quad \mathbb{I}_1 = I_1 \cdot e^{j\theta_1}$$

$$i_2(t) = \text{Re} \{ I_2 \cdot e^{j\theta_2} \cdot e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} \quad \text{con} \quad \mathbb{I}_2 = I_2 \cdot e^{j\theta_2}$$

reemplazando lo anterior en las ecuaciones (1.28) y (1.30) se tiene:

de la ecuación (1.28):

$$R_1 \cdot \text{Re} \{ \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} + L \frac{d}{dt} [\text{Re} \{ \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} - \text{Re} \{ \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \}] = \text{Re} \{ \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} \} \quad (1.31)$$

de la ecuación (1.30):

$$R_2 \frac{d}{dt} \text{Re} \{ \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} + \frac{1}{C} \text{Re} \{ \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} + L \frac{d^2}{dt^2} [\text{Re} \{ \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} - \text{Re} \{ \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \}] = 0 \quad (1.32)$$

• Aplicando la propiedad de la derivada:

en la ecuación (1.31):

$$\text{Re} \{ R_1 \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} + \text{Re} \{ j\omega L \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} - \text{Re} \{ j\omega L \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} \} \quad (1.33)$$

en la ecuación (1.32):

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ j\omega R_2 \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} + \text{Re} \left\{ \frac{1}{C} \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \right\} + \text{Re} \{ (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} \\ - \text{Re} \{ (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \} = 0 \end{aligned} \quad (1.34)$$

• Aplicando la propiedad de linealidad:

en la ecuación (1.33):

$$\begin{aligned} \text{Re} \{ R_1 \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} + j\omega L \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} - j\omega L \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} \} \\ \text{Re} \{ [R_1 \cdot \mathbb{I}_1 + j\omega L (\mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2)] \cdot e^{j\omega t} \} = \text{Re} \{ \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} \} \end{aligned} \quad (1.35)$$

en la ecuación (1.34):

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ j\omega \cdot R_2 \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{C} \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} + (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_2 \cdot e^{j\omega t} - (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_1 \cdot e^{j\omega t} \right\} = 0 \\ \text{Re} \left\{ \left[ j\omega \cdot R_2 \cdot \mathbb{I}_2 + \frac{1}{C} \cdot \mathbb{I}_2 + (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_2 - (j\omega)^2 L \cdot \mathbb{I}_1 \right] \cdot e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \{ 0 \cdot e^{j\omega t} \} \end{aligned} \quad (1.36)$$

• Aplicando la propiedad de igualdad:

en la ecuación (1.35):

$$R_1 \cdot \mathbb{I}_1 + j\omega L (\mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2) = \mathbb{V} \quad (1.37)$$

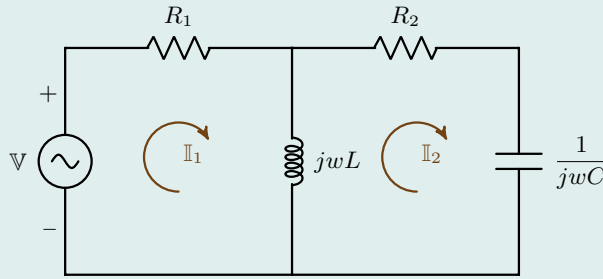
en la ecuación (1.36):

$$j\omega \cdot R_2 \cdot \mathbb{I}_2 + \frac{1}{C} \cdot \mathbb{I}_2 + (j\omega)^2 L (\mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1) = 0$$

Al dividir en ambos lados de la ecuación por  $j\omega$  se tiene que:

$$R_2 \cdot \mathbb{I}_2 + \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbb{I}_2 + j\omega L (\mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1) = 0 \quad (1.38)$$

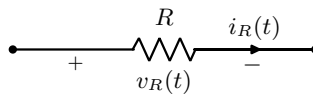
Finalmente, las ecuaciones (1.37) y (1.38) me generan el siguiente circuito:



**Figura 1.11.** Circuito transformado al dominio de la frecuencia  $w$

## 1.5. Aplicación del método fasorial a las relaciones V-I para elementos básicos RLC

### 1.5.1. Resistencia:



Se sabe que:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

Suponiendo que:

$$i_R(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i) = \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{I} = I_m \cdot e^{j\theta_i}$$

Entonces el voltaje en terminales de la resistencia es de la forma:

$$v_R(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta_v}$$

Interesan las relaciones entre  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{I}$ :

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R \cdot i_R(t) \\ \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] &= R \cdot \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \\ \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] &= \text{Re} [R \cdot \mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de igualdad del método fasorial:

$$\mathbb{V} = R \cdot \mathbb{I} \quad (\text{Ley de Ohm compleja})$$

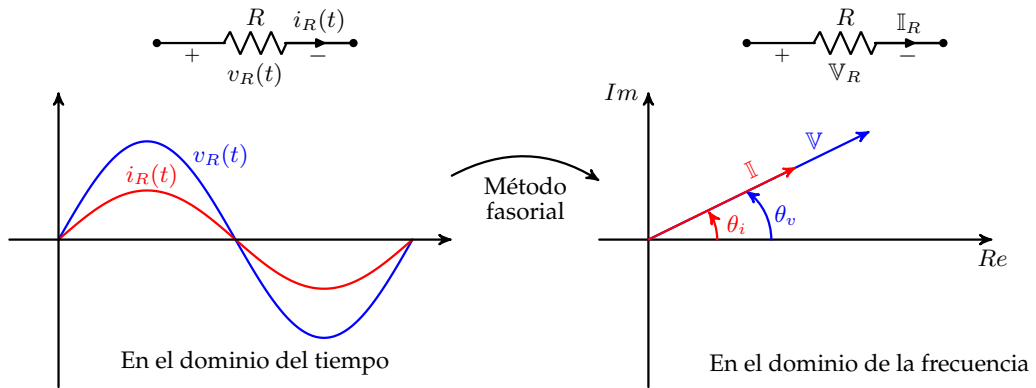
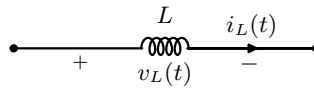


Figura 1.12. Método fasorial aplicado a la resistencia

El voltaje y la corriente están en fase y sus amplitudes se relacionan así:  $V_m = R \cdot I_m$

### 1.5.2. Inductancia



Se sabe que:

$$v_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t)$$

Suponiendo que:

$$i_L(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i) = \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{I} = I_m \cdot e^{j\theta_i}$$

Entonces el voltaje en terminales de la inductancia  $v_L(t)$  es de la forma:

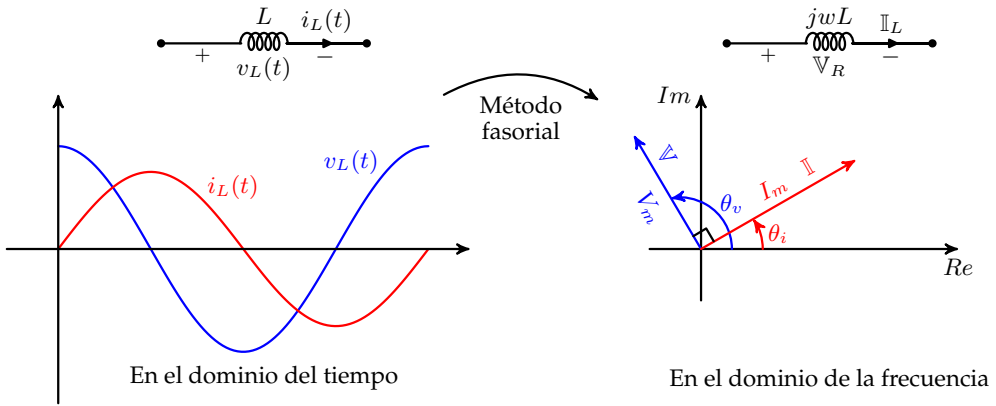
$$v_L(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta_v}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 v_L(t) &= L \cdot \frac{d}{dt} i_L(t) \\
 \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] &= L \cdot \frac{d}{dt} \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \\
 \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] &= \text{Re} \left[ L \cdot \frac{d}{dt} \mathbb{I} \cdot e^{j\omega t} \right] = \text{Re} [j\omega L \cdot \mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}]
 \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de igualdad del método fasorial:  $\mathbb{V} = j\omega L \cdot \mathbb{I}$

Resumiendo:

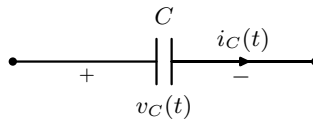


**Figura 1.13.** Método fasorial aplicado a la inductancia

Se tiene que:  $j = e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ$  llegando a:  $V_m = \omega L \cdot I_m$   
 $\theta_v = \theta_i + 90^\circ$

El voltaje en terminales de una inductancia, adelanta  $90^\circ$  a su corriente

### 1.5.3. Capacitor



Se sabe que:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{d}{dt} v_C(t)$$

Suponiendo que:

$$v_C(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{V} = V_m \cdot e^{j\theta_v}$$

Entonces la corriente en el capacitor  $i_C(t)$  es de la forma:

$$i_C(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i) = \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \quad \text{donde} \quad \mathbb{I} = I_m \cdot e^{j\theta_i}$$

Luego:

$$\begin{aligned} i_C(t) &= C \cdot \frac{d}{dt} v_C(t) \\ \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] &= C \cdot \frac{d}{dt} \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \\ \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] &= \text{Re} \left[ C \cdot \frac{d}{dt} \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t} \right] = \text{Re} [j\omega C \cdot \mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de igualdad del método fasorial:  $\mathbb{I} = j\omega C \cdot \mathbb{V}$

Resumiendo:

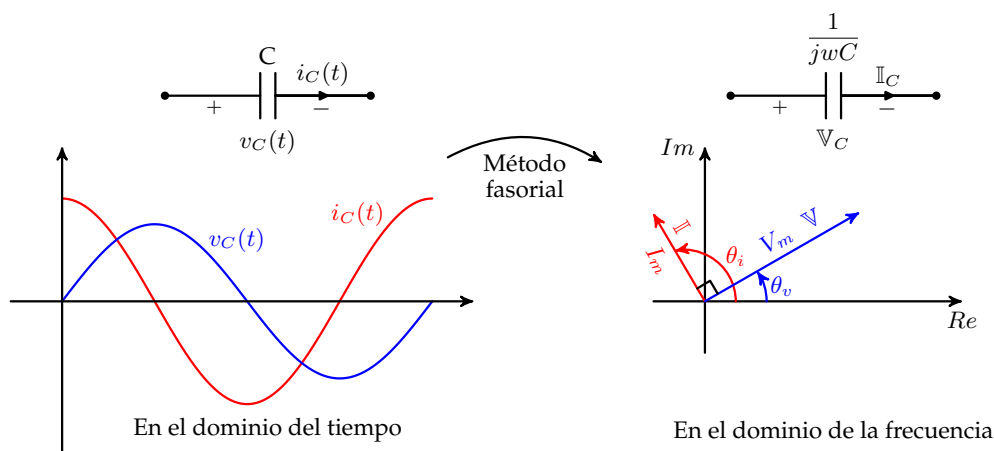


Figura 1.14. Método fasorial aplicado al capacitor

Se tiene que:  $j = e^{j90} = 1 \angle 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I_m &= \omega C \cdot V_m \\ \theta_i &= \theta_v + 90 \end{aligned}$

En un capacitor, la corriente adelanta  $90^\circ$  a la tensión

### 1.5.4. Impedancia

#### Impedancia de los elementos básicos de circuito RLC

Se define la impedancia <sup>2</sup>  $\mathbb{Z}$  como la relación entre el voltaje fasorial  $\mathbb{V}$  y la corriente fasorial  $\mathbb{I}$ .

---

<sup>2</sup>La impedancia es un número complejo



$$\mathbb{Z} \triangleq \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}}$$

$\mathbb{Z}$  es un número complejo es decir tiene una magnitud y un ángulo  $\mathbb{Z} = Z \angle \theta_Z$

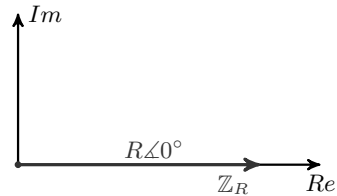
**Para la resistencia:**

$$\mathbb{V}_R = R \cdot \mathbb{I}_R$$

$$R = \frac{\mathbb{V}_R}{\mathbb{I}_R}$$

Luego:  $\mathbb{Z}_R = R$  ó  $\mathbb{Z}_R = R \angle 0^\circ$

En forma gráfica:



**Para la inductancia:**

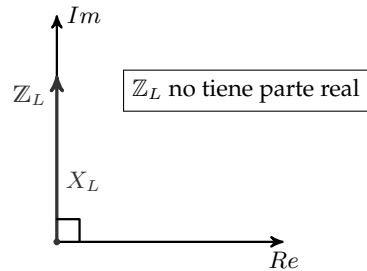
$$\mathbb{V}_L = j\omega L \cdot \mathbb{I}_L$$

$$j\omega L = \frac{\mathbb{V}_L}{\mathbb{I}_L} \implies \mathbb{Z}_L = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

Denotando:

$$\boxed{X_L = \omega L} \quad (\text{Reactancia inductiva})$$

En forma gráfica:



Se tiene que:

$$\mathbb{Z}_L = X_L \angle 90^\circ \quad \text{ó} \quad \mathbb{Z}_L = jX_L \quad X_L \equiv [\Omega]$$

**Para el capacitor:**

$$\mathbb{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbb{I}_C \implies \frac{1}{j\omega C} = \frac{\mathbb{V}_C}{\mathbb{I}_C}$$

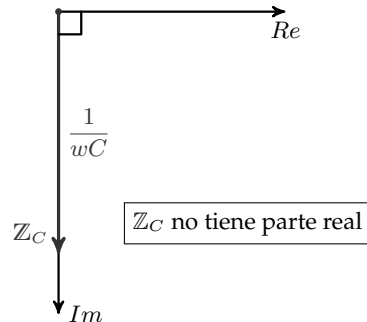
Luego:

$$\mathbb{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ = -j \frac{1}{\omega C}$$

Denotando:

$$\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}} \quad (\text{Reactancia capacitiva})$$

En forma gráfica:

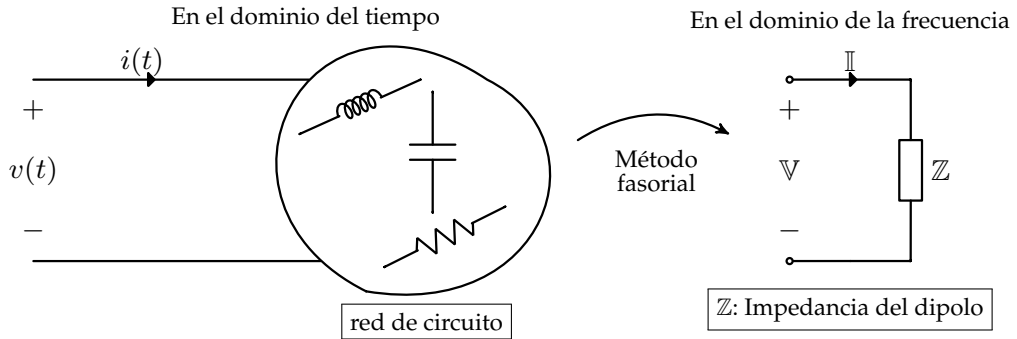


Se tiene que:

$$\mathbb{Z}_C = -jX_C = X_C \angle -90^\circ \quad X_C \equiv [\Omega]$$

### Impedancia de un dipolo en general

En general, para cualquier combinación de elementos pasivos de circuito:



**Figura 1.15.** Método fasorial aplicado a una red de circuito

Donde se cumple que:

$$v(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) = \text{Re} [\mathbb{V} \cdot e^{j\omega t}] \Rightarrow \mathbb{V} = V_m \angle \theta_v$$

$$i(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_i) = \text{Re} [\mathbb{I} \cdot e^{j\omega t}] \Rightarrow \mathbb{I} = I_m \angle \theta_i$$

Luego:

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V_m \angle \theta_v}{I_m \angle \theta_i} = \frac{V_m}{I_m} \angle \theta_v - \theta_i$$

- Magnitud de  $\mathbb{Z}$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} [\Omega]$$

- Angulo de la impedancia

$$\theta_Z = \theta_v - \theta_i$$

### Representación cartesiana de $\mathbb{Z}$

$$Z = \text{Re} [\mathbb{Z}] + j \text{Im} [\mathbb{Z}] = Z \cos(\theta_Z) + j Z \sin(\theta_Z)$$

Se define:

$$R_{equ} = \text{Re}[\mathbb{Z}] = Z \cos(\theta_Z)$$

$$X_{equ} = \text{Im}[\mathbb{Z}] = Z \sin(\theta_Z)$$

Luego:

$$\mathbb{Z} = R_{equ} + j X_{equ}$$

**Casos limite:** · Cuando  $\theta_v - \theta_i = -90^\circ$  (carga puramente capacitiva)

$$Requ = Z \cos(-90) = 0$$

$$Xequ = Z \sin(-90) = -Z$$

· Cuando  $\theta_v - \theta_i = 90^\circ$  (carga puramente inductiva)

$$Requ = Z \cos(90) = 0$$

$$Xequ = Z \sin(90) = Z$$

· Cuando  $\theta_v - \theta_i = 0^\circ$  (carga puramente resistiva)

$$Requ = Z \cos(0) = Z$$

$$Xequ = Z \sin(0) = 0$$

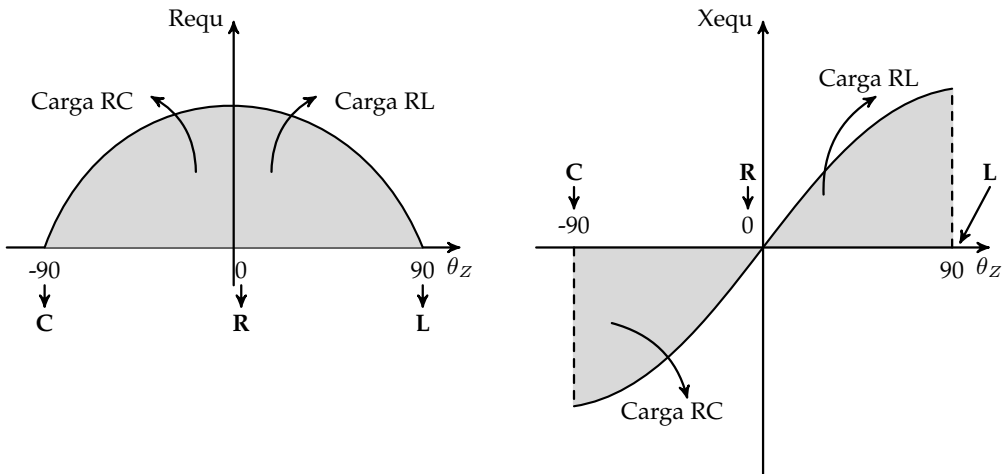


Figura 1.16. Casos especiales en forma gráfica

**Conclusión:** Si  $0 \leq \theta_Z \leq 90 \Rightarrow$  La carga es de tipo RL

Si  $-90 \leq \theta_Z \leq 0 \Rightarrow$  La carga es de tipo RC

El rango de variación del ángulo de la impedancia es:

$$\boxed{-90 \leq \theta_Z \leq 90}$$

### 1.5.5. Admitancia

Se define la admitancia<sup>3</sup>  $\mathbb{Y}$  como el inverso de la impedancia  $\mathbb{Z}$ .

<sup>3</sup>La admitancia es un número complejo

$$\mathbb{Y} \triangleq \frac{1}{\mathbb{Z}}$$

$\mathbb{Y}$  es un número complejo es decir tiene magnitud  $Y$  y ángulo  $\theta_y$

### En representación polar

$$\mathbb{Y} = \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{Z \angle \theta_Z} = \frac{1}{Z} \angle -\theta_Z$$

Magnitud :  $\boxed{Y = \frac{1}{Z}}$  [mho] ó [U] ;      Ángulo :  $\boxed{\theta_y = -\theta_Z}$

### En representación cartesiana

$$\mathbb{Y} = \frac{1}{\mathbb{Z}} = \frac{1}{Z \cos \theta_Z + j Z \sin \theta_Z} \cdot \frac{Z \cos \theta_Z - j Z \sin \theta_Z}{Z \cos \theta_Z - j Z \sin \theta_Z}$$

$$\mathbb{Y} = \frac{Z \cos \theta_Z - j Z \sin \theta_Z}{(Z \cos \theta_Z)^2 + (Z \sin \theta_Z)^2} = \frac{\cos \theta_Z}{Z} - j \frac{\sin \theta_Z}{Z}$$

$$\mathbb{Y} = Y \cos \theta_y + j Y \sin \theta_y$$

### Para los elementos básicos de circuito RLC

#### Para la resistencia:

$$\mathbb{Y}_R = \frac{1}{\mathbb{Z}_R} = \frac{1}{R \angle 0} = \frac{1}{R} \angle 0$$

$$\mathbb{Y}_R = G \angle 0, \quad G \equiv \mathcal{U}$$

Se define  $\boxed{G = \frac{1}{R}}$  como la Conductancia.

#### Para la inductancia:

$$\mathbb{Y}_L = \frac{1}{\mathbb{Z}_L} = \frac{1}{X_L \angle 90} = \frac{1}{X_L} \angle -90$$

$$\mathbb{Y}_L = B_L \angle -90, \quad B_L \equiv \mathcal{U}$$

Se define  $\boxed{B_L = \frac{1}{wL}}$  como la susceptancia inductiva.

Para el capacitor:

$$\mathbb{Y}_C = \frac{1}{\mathbb{Z}_C} = \frac{1}{X_C \angle -90} = \frac{1}{X_C} \angle 90$$

$$\mathbb{Y}_C = B_C \angle 90, \quad B_C \equiv \mathcal{U}$$

Se define  $B_C = \omega C$  como la suceptancia capacitiva.

**Admitancia de un dipolo:**

$$\mathbb{Y} = G_{equ} + jB_{equ}$$

$$G_{equ} = Y \cos \theta_y \quad B_{equ} = Y \sin \theta_y$$

Se puede demostrar que:

$$G_{equ} = \frac{R_{equ}}{R_{equ}^2 + X_{equ}^2} \quad B_{equ} = \frac{X_{equ}}{R_{equ}^2 + X_{equ}^2}$$

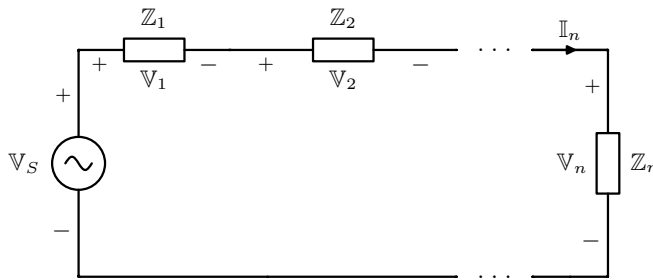
Nótese que:

$$G_{equ} \neq \frac{1}{R_{equ}} \quad B_{equ} \neq \frac{1}{X_{equ}}$$

## 1.6. Circuitos serie y paralelo

### 1.6.1. Conexión serie de dipolos

Suponiendo el circuito de la figura:



**Figura 1.17.** Conexión de dipolos en serie

Nótese que:

$$V_S = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Además:

$$V_1 = Z_1 \cdot I, \quad V_2 = Z_2 \cdot I, \quad \dots, \quad V_n = Z_n \cdot I$$

Obteniendo:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_S &= \mathbb{Z}_1 \cdot \mathbb{I} + \mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{I} + \dots + \mathbb{Z}_n \cdot \mathbb{I} \\ \mathbb{V}_S &= (\mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2 + \dots + \mathbb{Z}_n) \cdot \mathbb{I} = \sum_{n=1}^i \mathbb{Z}_i \cdot \mathbb{I} \\ \mathbb{V}_S &= \mathbb{Z}_{equ} \cdot \mathbb{I}\end{aligned}$$

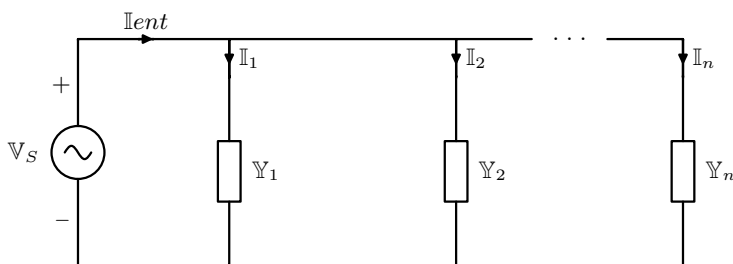
Donde:

$$\mathbb{Z}_{equ} = \sum_{n=1}^i \mathbb{Z}_i$$

**Conclusión:** Para  $n$  impedancias conectadas en serie, se pueden reemplazar por una *impedancia equivalente* que se denomina como la suma compleja de las impedancias.

### 1.6.2. Conexión en paralelo de dipolos

Suponiendo el circuito de la figura:



**Figura 1.18.** Conexión de dipolos en paralelo

Nótese que:

$$\mathbb{I}_{ent} = \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \dots + \mathbb{I}_n$$

Además:

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{Y}_1 \cdot \mathbb{V}_S, \quad \mathbb{I}_2 = \mathbb{Y}_2 \cdot \mathbb{V}_S, \quad \dots, \quad \mathbb{I}_n = \mathbb{Y}_n \cdot \mathbb{V}_S$$

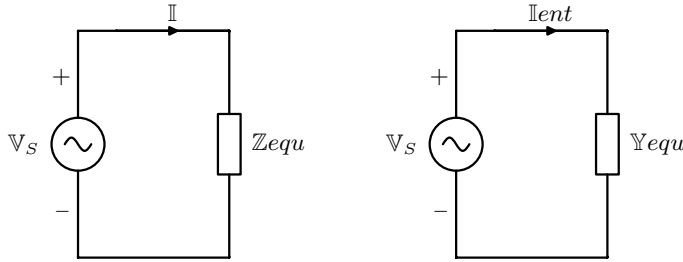
Obteniendo:

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_{ent} &= \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \dots + \mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_{ent} &= \mathbb{Y}_1 \cdot \mathbb{V}_S + \mathbb{Y}_2 \cdot \mathbb{V}_S + \dots + \mathbb{Y}_n \cdot \mathbb{V}_S \\ \mathbb{I}_{ent} &= (\mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2 + \dots + \mathbb{Y}_n) \cdot \mathbb{V}_S = \sum_{n=1}^i \mathbb{Y}_i \cdot \mathbb{V}_S \\ \mathbb{I}_{ent} &= \mathbb{Y}_{equ} \cdot \mathbb{V}_S\end{aligned}$$

Donde:

$$Y_{equ} = \sum_n^{i=1} Y_i$$

**Conclusión:** Para  $n$  admitancias conectadas en paralelo, se pueden reemplazar por una *admitancia equivalente* que se denomina como la suma compleja de las admitancias.



**Figura 1.19.** Circuitos equivalentes de los dipolos en conexión serie y paralelo respectivamente

### 1.6.3. Divisor de tensión y de corriente

#### Divisor de tensión complejo

En una conexión serie como la de la figura 1.17, el voltaje del  $n$ -ésimo dipolo se obtiene así:

$$V_n = Z_n \cdot I$$

Donde: 
$$I = \frac{V_S}{Z_{equ}} = \frac{V_S}{\sum_n^{i=1} Z_i}$$

Reemplazando se llega a que:

$$V_n = \frac{Z_n}{\sum_n^{i=1} Z_i} \cdot V_S$$

#### Divisor de corriente complejo

En una conexión en paralelo como la de la figura 1.18, la corriente del  $n$ -ésimo dipolo se obtiene así:

$$I_n = Y_n \cdot V_S$$

Donde: 
$$V_S = \frac{I_{ent}}{Y_{equ}} = \frac{I}{\sum_n^{i=1} Y_i}$$

Reemplazando se llega a que:

$$I_n = \frac{Y_n}{\sum_n^{i=1} Y_i} \cdot I_{ent}$$

## 1.7. Diagramas fasoriales de redes simples

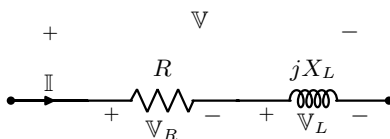
En los circuitos eléctricos usados en este libro, los valores de las corrientes y de las tensiones se tratan como fasores. Estos fasores se representan en lo que se denomina diagrama fasorial.

Los diagramas fasoriales se van construyendo teniendo en cuenta los distintos elementos que componen el circuito.

- Resistencia ( $R$ ): La corriente y el voltaje están en fase.
- Inductancia ( $L$ ): La corriente atrasa  $90^\circ$  el voltaje.
- Capacitor ( $C$ ): La corriente adelanta  $90^\circ$  el voltaje.
- Circuito serie: La corriente es común a los elementos, el voltaje es la suma de voltajes en los elementos.
- Circuito paralelo: El voltaje es común a los elementos, la corriente es la suma de las corrientes en los elementos.

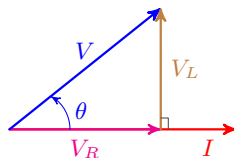
[4] Algunos ejemplos de diagramas fasoriales son:

**Elementos  $RL$  en serie:**



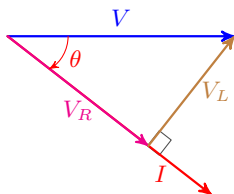
Tomando la corriente  $I$  como referencia:  $I = I \angle 0^\circ$

Lo que nos dice que  $V_R$  está en fase con  $I$  y  $V_L$  adelanta  $90^\circ$  a  $I$ .



Tomando el voltaje  $V$  como referencia:  $V = V \angle 0^\circ$

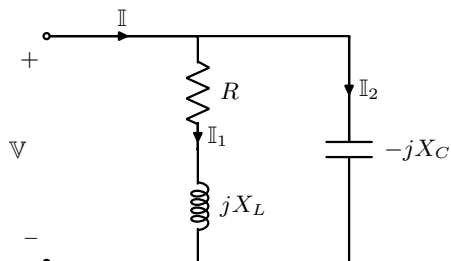
Lo que nos dice que  $V_R$  está en fase con  $I$  y  $V_L$  adelanta  $90^\circ$  a  $I$



Nótese que en ambos casos la corriente atrasa al voltaje.

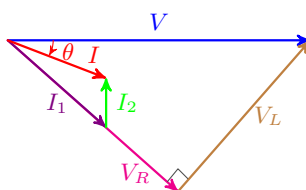


Elementos  $RL$  en paralelo con  $C$ :



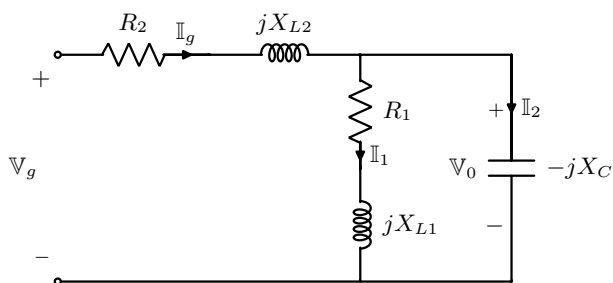
Tomando el voltaje  $V$  como referencia:  $V = V \angle 0^\circ$ , se tiene que:

$I_1$  atrasa a  $V$  e  $I_2$  adelanta  $90^\circ$  a  $V$  llegando al siguiente diagrama fasorial:



Ya que  $I$  está en atraso respecto a  $V$ , el comportamiento del circuito es inductivo.

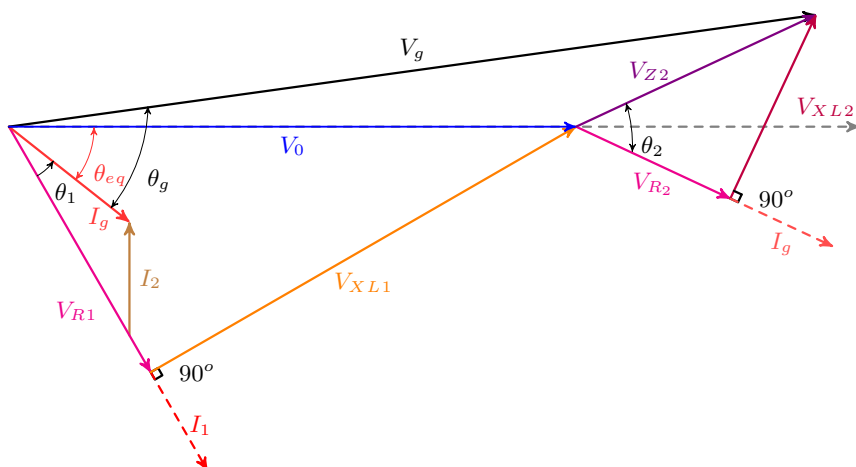
Combinando los circuitos anteriores:



Tomando el voltaje  $V_0$  como referencia:  $V_0 = V_0 \angle 0^\circ$ , se tiene que:

$$I_g = I_1 + I_2 \quad , \quad V_0 = V_{R_1} + V_{X_1} \quad , \quad V_g = V_{Z_2} + V_0$$

Haciendo el diagrama fasorial:



Nótese que: 
$$\mathbb{V}_{Z_2} = \mathbb{V}_{R_2} + \mathbb{V}_{X_{L2}} \implies \mathbb{V}_g = \mathbb{V}_{R_2} + \mathbb{V}_{X_{L2}} + \mathbb{V}_0$$

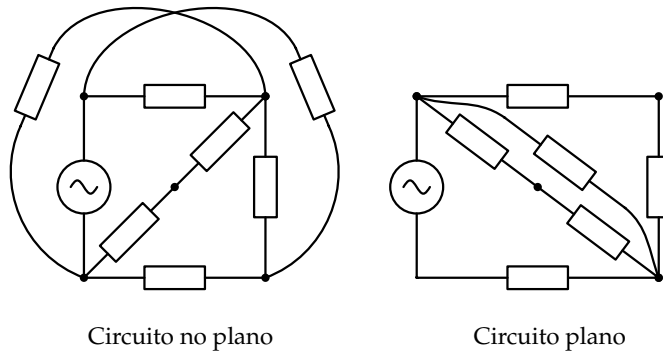
Por lo regular en los circuitos a resolver se da el valor de algunos elementos ya sean corrientes o voltajes y las incógnitas son pocas. Con los principios mencionados en esta sección se pueden hallar dichas incógnitas utilizando los diagramas fasoriales y resolviendo los mismos por medio de relaciones de ángulos y magnitudes utilizando técnicas trigonométricas como la ley del seno y del coseno.

## 1.8. Métodos para resolver circuitos eléctricos

Existen varias formas o métodos para resolver un circuito eléctrico, en el curso de circuitos eléctricos 1, ya se vieron varias de estas técnicas; ahora bien en esta sección se verán algunas técnicas de resolución de circuitos pero teniendo en cuenta el método fasorial y tomando dichos circuitos en régimen permanente. Estos métodos sistemáticos permiten resolver los circuitos de un modo ordenado, escribiendo las ecuaciones independientes de la red en función de un pequeño número de variables (el mínimo necesario) lo que da lugar a procedimientos metódicos, fáciles de aplicar y también rápidos, que utilizan como base los teoremas de Kirchhoff [2].

### 1.8.1. Método de corrientes de malla

Antes de empezar a resolver un circuito por el método de corrientes de mallas, se debe intentar siempre que sea posible, convertir las fuentes de corriente por fuentes de voltajes equivalentes (ver apéndice A.1). El análisis de mallas se aplica sólo en aquellos circuitos que son de forma plana; un circuito plano o de forma plana, es aquel cuyo esquema se puede dibujar sobre una superficie plana de manera tal que ninguna rama pase sobre o por debajo de cualquier otra rama.



**Figura 1.20.** Ejemplo circuito plano y no plano

El análisis de mallas brinda un procedimiento general para el análisis de circuitos, con el uso de corrientes de malla como las variables del circuito. Emplear corrientes de malla en vez de corrientes de elemento como variables de circuito es conveniente y reduce el número de ecuaciones que deben resolverse en forma simultánea. En el método de mallas se aplica la ley de tensión de Kirchhoff para hallar las corrientes desconocidas. Se puede saber el número de mallas que tiene un circuito utilizando la formula:  $m = r - n + 1$  siendo  $r$  el número de ramas y  $n$  el número de nodos del circuito.

El método de las mallas consiste en asignar a cada malla una corriente desconocida, de tal forma que tengan todas el mismo sentido. La elección uniforme del sentido de estas corrientes permitirá obtener un sistema de ecuaciones cuya descripción es muy metódica y simple. Las intensidades de rama quedan fácilmente identificadas, en función de las corrientes de malla.

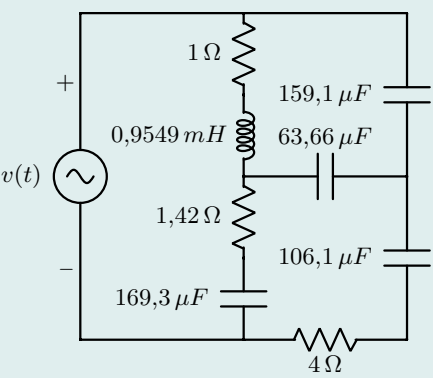
Para resolver un circuito por el método de corrientes de malla es necesario seguir los siguientes pasos:

- Observar si el circuito a analizar posee fuentes de corriente, si es el caso convertirlas a una fuente equivalente de voltaje.
- Asignar a las  $m$  mallas del circuito una corriente desconocida en el sentido mas conveniente según el circuito.
- Aplicar la ley de tensión de Kirchhoff a cada una de las  $m$  mallas del circuito.
- Usar la ley de Ohm para expresar los voltajes obtenidos en el punto anterior en función de las corrientes de malla.
- Resolver las  $m$  ecuaciones linealmente independientes obtenidas para encontrar los valores de las corrientes de malla.
- Ya sabiendo el valor de las corrientes de malla, se puede obtener el valor de las corrientes de rama.

A continuación se verán algunos ejemplos de solución de circuitos eléctricos por el método de corrientes de malla.

**Ejemplo 1.7:** Para el circuito de la figura, hallar las corrientes de malla si  $v(t) = 25 \cdot \sin(\omega t)$  teniendo en cuenta que la frecuencia del circuito es de 500 Hz.

**Solución:**  
Como el circuito está en el dominio del tiempo se pasa al dominio de la frecuencia aplicando el método fasorial, utilizando la frecuencia angular  $\omega = 2\pi \cdot f$  donde  $f$  es la frecuencia dada (500 Hz). Aplicando el método fasorial a los elementos y teniendo en cuenta que:



$$X_L = 2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot C$$

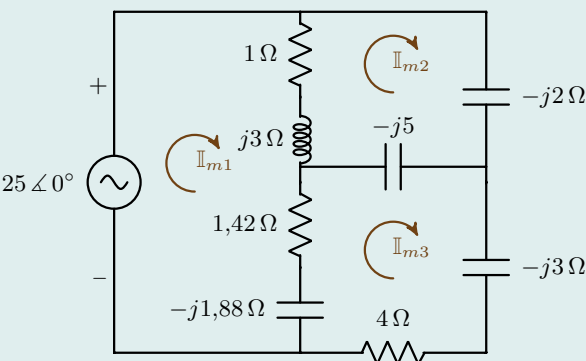
$$y$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi \cdot 500 \text{ Hz} \cdot L}$$

Se obtienen los resultados de la siguiente tabla:

	En el dominio del tiempo	En el dominio de la frecuencia
Fuente	$v(t) = 25 \cdot \sin(\omega t)$	$V = 25 \angle 0$
Resistencias	$R_1 = 1 \Omega$	$Z_{R_1} = 1 \Omega$
	$R_2 = 1,42 \Omega$	$Z_{R_2} = 1,42 \Omega$
	$R_3 = 4 \Omega$	$Z_{R_3} = 4 \Omega$
Inductancia	$L = 0,9549 \text{ mH}$	$Z_L = jX_L = j3 \Omega$
Capacitores	$C_1 = 169,3 \mu F$	$Z_{C_1} = -jX_{C_1} = -j1,88 \Omega$
	$C_2 = 159,1 \mu F$	$Z_{C_2} = -jX_{C_2} = -j2 \Omega$
	$C_3 = 106,1 \mu F$	$Z_{C_3} = -jX_{C_3} = -j3 \Omega$
	$C_4 = 63,66 \mu F$	$Z_{C_4} = -jX_{C_4} = -j5 \Omega$

Para simplificar se pueden tomar los elementos en serie como impedancias, por ejemplo para los elementos en serie  $Z_{R_1} = 1 \Omega$  y  $Z_L = j3 \Omega$ , expresándolos como impedancia se tiene que  $Z = (1 + j3) \Omega$ , lo mismo se podría hacer si el circuito tuviera elementos en paralelo, con su equivalente en admitancia.



Observando se puede notar que el circuito a analizar posee 3 mallas ( $m=6-4+1=3$ ) por ende se obtendrán tres corrientes

de malla las cuales se asignan al circuito. Teniendo las corrientes de malla definidas, se procede a aplicar la ley de tensión de Kirchhoff en cada una de las mallas, usando la ley de Ohm para expresar los voltajes obtenidos en función de las corrientes de malla; al plantear las ecuaciones hay que tener en cuenta que la polaridad del voltaje para cada elemento depende de la dirección de la corriente de malla.

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \curvearrowright \sum \mathbb{V}_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad -25 \angle 0 + (1 + j3)(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) + (1,42 - j1,88)(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m3}) = 0$$

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \curvearrowright \sum \mathbb{V}_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 + j3)(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m1}) - j2 \cdot \mathbb{I}_{m2} - j5 \cdot (\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3}) = 0$$

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \curvearrowright \sum \mathbb{V}_{m3} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1,42 - j1,88)(\mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m1}) - j5 \cdot (\mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m2}) + (4 - j3) \cdot \mathbb{I}_{m3} = 0$$

Las ecuaciones anteriores se pueden reescribir en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2,42 + j1,12 & -1 - j3 & -1,42 + j1,88 \\ -1 - j3 & 1 - j4 & j5 \\ -1,42 + j1,88 & j5 & 5,42 - j9,88 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones y aplicando la inversa a la matriz de elementos:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,42 + j1,12 & -1 - j3 & -1,42 + j1,88 \\ -1 - j3 & 1 - j4 & j5 \\ -1,42 + j1,88 & j5 & 5,42 - j9,88 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver se obtienen los valores de las corrientes de malla:

$$\mathbb{I}_{m1} = 6,4 \angle -14,52^\circ$$

$$\mathbb{I}_{m2} = 5 \angle 90^\circ$$

$$\mathbb{I}_{m3} = 3 \angle 36,88^\circ$$

Ya teniendo las corrientes de malla, se puede encontrar cualquier voltaje o corriente que circule por el circuito; por ejemplo si queremos saber el voltaje que circula por la resistencia  $R_2 = 1,42 \Omega$  se puede obtener así:

$$\mathbb{V}_{R_2} = \mathbb{Z}_{R_2} \cdot (\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m3}) = 1,42 \Omega \cdot (6,4 \angle -14,52^\circ - 3 \angle 36,88^\circ) A = 7,24 \angle -41,89^\circ V$$

De igual manera se puede hacer para hallar las corrientes; por ejemplo para obtener la corriente que pasa por el capacitor  $C_4 = 63,66 \mu F$  se puede obtener así:

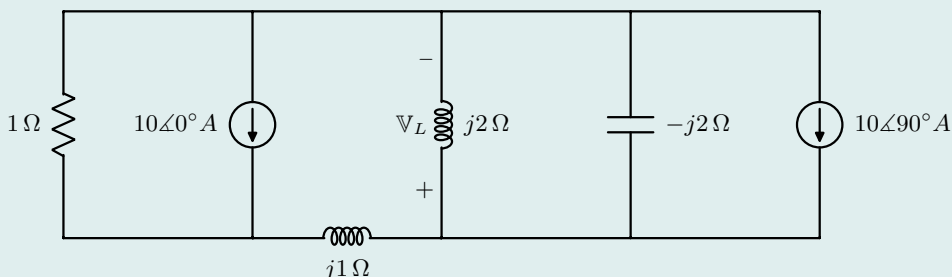
$$\mathbb{I}_{C_4} = \mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m2} = 3 \angle 36,88^\circ A - 5 \angle 90^\circ A = 3,99 \angle -53,13^\circ A$$

Ahora bien, los valores obtenidos se pueden expresar en el dominio del tiempo así:

$$v_{R_2}(t) = 7,24 \cdot \sin(2\pi \cdot 500t - 41,89^\circ) \text{ V} \quad e \quad i_{C_4}(t) = 3,99 \cdot \sin(2\pi \cdot 500t - 53,13^\circ) \text{ A}$$

**Nota:** Para los próximos ejercicios, se omitirá la aplicación del método fasorial, asumiendo todos los ejercicios en el dominio de la frecuencia.

**Ejemplo 1.8:** Para el circuito de la figura, hallar el voltaje  $V_L$  usando el método de las corrientes de malla.



**Solución:**

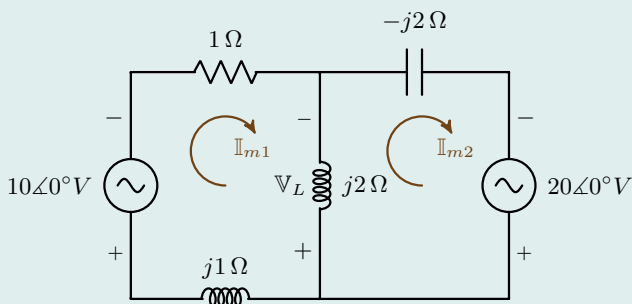
Como el circuito posee fuentes de corrientes que no permiten usar la ley de tensiones de Kirchhoff en todas las mallas, se debe plantear el método de corrientes de malla de otra manera. En este caso dicho planteamiento se puede hacer de dos formas:

**Primera forma:** Haciendo transformación de fuentes.

Del circuito a analizar se puede notar que las fuentes de corriente están en paralelo con una impedancia, esto se puede aprovechar para hacerles transformación de fuente.

Ahora el circuito solo tiene dos mallas y la ley de tensión de Kirchhoff se puede aplicar tranquilamente.

Resolviendo el circuito:



$$\begin{aligned} \sum V_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad 10\angle 0 + 1 \cdot I_{m1} - V_L + j1 \cdot I_{m1} = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\sum \mathbb{V}_{m2} = 0 \Rightarrow \mathbb{V}_L - j2 \cdot \mathbb{I}_{m2} - 20\angle 0 = 0 \quad (1.40)$$

Se sabe que:

$$\mathbb{V}_L = j2 \cdot (\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m1}) \quad (1.41)$$

Reemplazando (1.41) en (1.39) y (1.40) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 + j3 & -j2 \\ -j2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 180 \\ 20\angle 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver se obtiene:

$$\mathbb{I}_{m1} = 10\angle 90^\circ A \quad (1.42)$$

$$\mathbb{I}_{m2} = 11,18\angle 63,43^\circ A \quad (1.43)$$

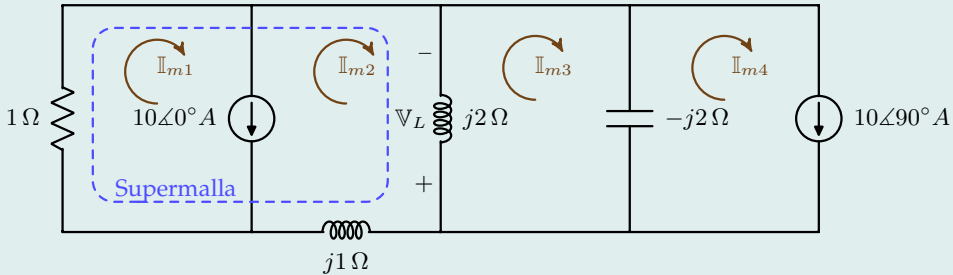
Al reemplazar (1.42) y (1.43) en (1.41) se obtiene el voltaje deseado:

$$\boxed{\mathbb{V}_L = 10\angle 90^\circ V}$$

**Segunda forma:** *Aplicando supermalla.*

Lo que se hace es evitar las ramas donde hay fuentes de corriente haciendo un recorrido por la periferia del circuito; entonces se expresan las tensiones alrededor de la supermalla en término de las corrientes de malla originales.

Dibujando las corrientes de malla del circuito junto con la supermalla se tiene:



Al evitar las fuentes de corriente, se puede aplicar la ley de tensiones de Kirchhoff a la supermalla y a la malla 3 así:

$$\sum \mathbb{V}_{Sm} = 0 \Rightarrow 1 \cdot \mathbb{I}_{m1} - \mathbb{V}_L + j1 \cdot \mathbb{I}_{m2} = 0 \quad (1.44)$$

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \bigcirc \sum \mathbb{V}_{m3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}_L - j2 \cdot (\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m4}) = 0 \quad (1.45)$$

Adicionalmente del circuito podemos sacar otras ecuaciones:

$$\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2} = 10 \angle 0^\circ A \Rightarrow \mathbb{I}_{m1} = \mathbb{I}_{m2} + 10 \angle 0^\circ A \quad (1.46)$$

$$\mathbb{I}_{m4} = 10 \angle 90^\circ A \quad (1.47)$$

$$\mathbb{V}_L = j2 \cdot (\mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m2}) \quad (1.48)$$

Reemplazando las ecuaciones (1.46), (1.47) y (1.48) en (1.44) y (1.45) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 1 + j3 & -j2 \\ -j2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \angle 180^\circ \\ 20 \angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Se puede observar que es el mismo sistema de ecuaciones al que se llegó por la primera forma, obteniéndose los mismos resultados.

De este ejemplo cabe resaltar que para resolver un circuito que contenga fuentes de corriente, es conveniente transformarlas a su equivalente en fuentes de voltaje ya que reduce las mallas del circuito, si esto no es posible se puede aplicar el concepto de supermalla para resolver el circuito.

## 1.8.2. Método de voltaje de nodos

El método de voltajes de nodos brinda un procedimiento general para el análisis de circuitos con el uso de voltajes de nodo como variables de circuito. La elección de los voltajes de nodo en vez de voltajes de elemento como las variables de circuito es conveniente y reduce el número de ecuaciones que deben resolverse en forma simultánea. El método consiste en aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a los  $n$  nodos del circuito a analizar y así hallar los voltajes en cada nodo del circuito; se debe tomar uno de los nodos como potencial de referencia, osea que se podrán calcular las tensiones respecto a este, quedando así  $n-1$  nodos independientes que generan un mismo número de ecuaciones.

La elección del nodo de referencia es totalmente libre, pero lo más práctico es elegir aquel nodo que tenga más ramas conectadas a él. El nodo de referencia está por consiguiente al potencial de tierra o potencial cero y los voltajes del resto de nodos se referirán respecto de la tensión de tierra (0V) lo que permitirá definir potenciales absolutos y no diferencia de potenciales.

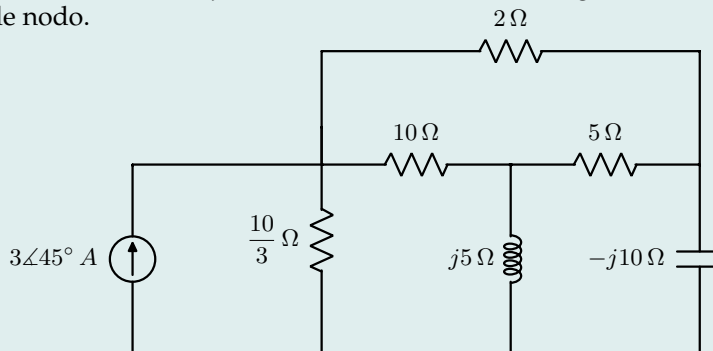
Para resolver un circuito por el método de voltajes de nodo es necesario seguir los siguientes pasos:



- Observar si el circuito a analizar posee fuentes de voltaje en serie con impedancias, si es el caso convertirlas a una fuente equivalente de corriente.
- Identificar los nodos del circuito y seleccionar el nodo de referencia.
- Asignar los voltajes de cada nodo con respecto al de referencia.
- Aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a los  $n-1$  nodos del sistema
- Usar la ley de Ohm para expresar las corrientes de rama en término de los voltajes de nodo.
- Plantear el sistema de ecuaciones en función de los voltajes de nodo y resolverlo para hallar el voltaje en cada uno de los  $n-1$  nodos del circuito.
- Para hallar el voltaje entre dos nodos, se hace una diferencia de potencial entre los voltajes de nodo obtenidos.

A continuación se verán algunos ejemplos de solución de circuitos eléctricos por el método de voltajes de nodo.

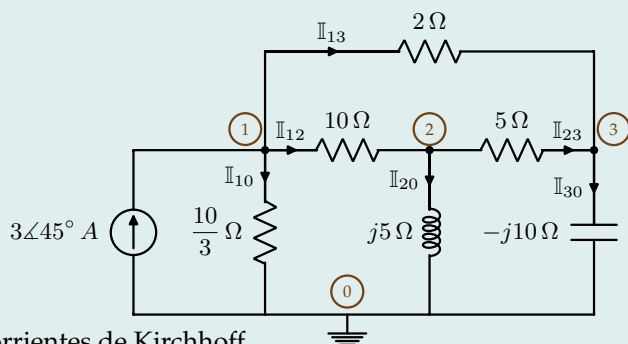
**Ejemplo 1.9:** Hallar los voltajes de nodo del circuito de la figura utilizando el método de voltajes de nodo.



**Solución:**

Lo primero es identificar los nodos del circuito y tomar uno de ellos como referencia, en este caso el nodo de referencia se nombrará como el nodo cero (0) o se puede señalar con el símbolo de tierra. También se le pueden asignar corrientes a las ramas del circuito ya que se necesitarán al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff.

Expresando las corrientes de ramas en término de los voltajes de nodo se tiene:



$$I_{10} = \frac{V_1}{\frac{10}{3} \Omega} ; \quad I_{20} = \frac{V_2}{j5 \Omega} ; \quad I_{30} = \frac{V_3}{-j10 \Omega}$$

$$I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{10\Omega} \quad ; \quad I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{2\Omega} \quad ; \quad I_{23} = \frac{V_2 - V_3}{5\Omega}$$

Al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff a cada nodo del circuito se tiene:

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3\angle 45^\circ A + \frac{V_1}{\frac{10}{3}\Omega} + \frac{V_1 - V_2}{10\Omega} + \frac{V_1 - V_3}{2\Omega} = 0$$

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(V_1 - V_2)}{10\Omega} + \frac{V_2}{j5\Omega} + \frac{V_2 - V_3}{5\Omega} = 0$$

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3}{-j10\Omega} + \frac{-(V_1 - V_3)}{2\Omega} + \frac{-(V_2 - V_3)}{5\Omega} = 0$$

El sistema de ecuaciones obtenido se puede organizar de manera matricial así:

$$\begin{bmatrix} 0,9 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & 0,3 - j0,2 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -0,7 - j0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\angle 45^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Reescribiendo el sistema de ecuaciones y aplicando la inversa a la matriz de elementos:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{10} & 0,3 - j0,2 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & -0,7 - j0,1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3\angle 45^\circ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al resolver se obtienen los valores de los voltajes de nodo:

$$V_1 = 7,73 \angle 50,86^\circ V$$

$$V_2 = 5,99 \angle 84,29^\circ V$$

$$V_3 = 6,94 \angle 50,46^\circ V$$

Ya teniendo los voltajes de nodos se puede hallar cualquier corriente del circuito, por ejemplo para obtener la corriente que pasa por la inductancia se tiene que:

$$I_{20} = \frac{V_2}{j5\Omega} = \frac{5,99 \angle 84,29^\circ V}{j5\Omega} = 1,19 \angle -5,7^\circ A$$

Si se quiere saber el voltaje en la resistencia de  $2\ \Omega$ , se hace una diferencia de potencial así:

$$V_{R:2\Omega} = V_1 - V_3 = 0,78 \angle 54,36^\circ\text{ V}$$

**Ejemplo 1.10:** Para el circuito de las figuras A y B, hallar el voltaje  $V_0$  utilizando el método de voltajes de nodo tomando como referencia el nodo indicado para cada caso.

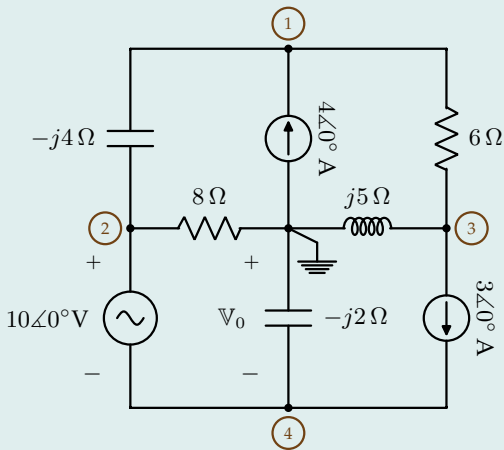


Figura A

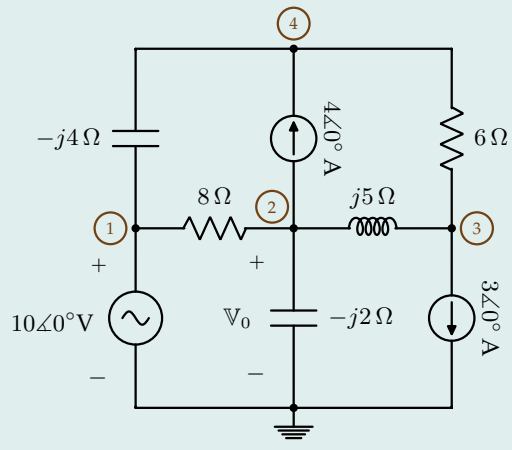


Figura B

### Solución:

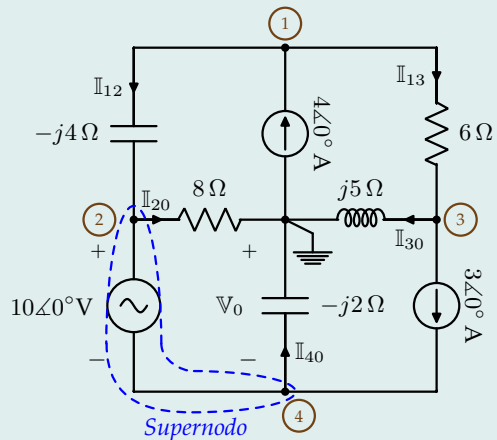
\* Resolviendo el circuito de la figura A:  
De la figura se puede observar que entre los nodos 2 y 4 existe una fuente de voltaje, esto hace que no se pueda plantear una corriente por la rama. Lo que se hará en este caso es volver esta fuente un *supernodo* y así poder aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff tranquilamente. De la fuente del supernodo se obtiene una ecuación en términos de los voltajes de nodo 3 y 4; aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff se obtiene:

$$10 \angle 0^\circ \text{ V} = V_2 - V_4$$

Expresando las corrientes de rama en términos de los voltajes de nodo se tiene:

$$I_{20} = \frac{V_2}{8\ \Omega} \quad ; \quad I_{30} = \frac{V_3}{j5\ \Omega} \quad ; \quad I_{40} = \frac{V_4}{-j2\ \Omega} \quad ; \quad I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{-j4\ \Omega} \quad ; \quad I_{13} = \frac{V_1 - V_3}{6\ \Omega}$$

Al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en cada nodo del circuito se tiene:



$$\begin{aligned}
 \bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\text{①}} = 0 & \Rightarrow -4\angle 0^\circ \text{ A} + \frac{V_1 - V_2}{-j4\Omega} + \frac{V_1 - V_3}{6\Omega} = 0 \\
 \bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\text{③}} = 0 & \Rightarrow \frac{V_3}{j5\Omega} - \frac{V_1 - V_3}{6\Omega} + 3\angle 0^\circ \text{ A} = 0 \\
 \bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\text{Supernodo}} = 0 & \Rightarrow \frac{V_2}{8\Omega} + \frac{V_4}{-j2\Omega} - \frac{V_1 - V_2}{-j4\Omega} - 3\angle 0^\circ \text{ A} = 0
 \end{aligned}$$

De aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en los nodos y de la ecuación obtenida del supernodo, se obtiene un sistema de ecuaciones linealmente independiente que se expresara en forma matricial así:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6} + j\frac{1}{4} & -j\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} + j\frac{1}{5} & 0 \\ -j\frac{1}{4} & \frac{1}{8} + j\frac{1}{4} & 0 & j\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\angle 0^\circ \\ 3\angle 0^\circ \\ 3\angle 0^\circ \\ 10\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

Del sistema anterior, se hallará el voltaje  $V_4$ . Utilizando el método de Cramer (ver apéndice A.3) se tiene:

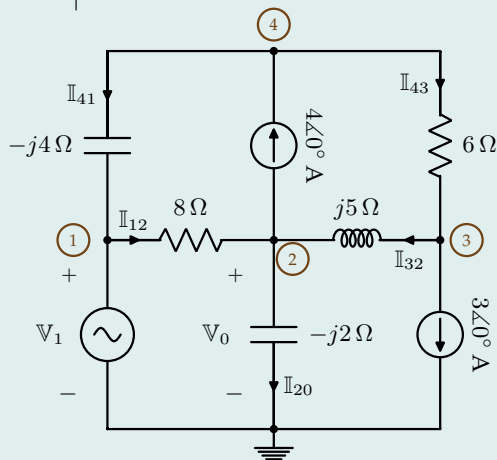
$$V_4 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{6} + j\frac{1}{4} & -j\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 4\angle 0^\circ \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} + j\frac{1}{5} & 3\angle 0^\circ \\ -j\frac{1}{4} & \frac{1}{8} + j\frac{1}{4} & 0 & 3\angle 0^\circ \\ 0 & -1 & 0 & 10\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{6} + j\frac{1}{4} & -j\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} + j\frac{1}{5} & 0 \\ -j\frac{1}{4} & \frac{1}{8} + j\frac{1}{4} & 0 & j\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = 7,55 \angle -52,79^\circ \text{ V}$$

Con el valor de  $V_4$  se obtiene  $V_0$ :

$$\boxed{V_0 = -V_4 = 7,55 \angle 127,2^\circ \text{ V}}$$

\* Resolviendo el circuito de la figura B:  
De la figura se puede observar que entre el nodo 1 y el de referencia existe una fuente de voltaje, al igual que en el caso anterior no es sencillo plantear la corriente por esta rama; pero lo que se hará es darle el valor de la fuente al nodo 1.

$$V_1 = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$



Expresando las corrientes de rama en términos de los voltajes de nodo se tiene:

$$I_{20} = \frac{V_2}{-j2\Omega} ; I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{8\Omega} ; I_{32} = \frac{V_3 - V_2}{j5\Omega} ; I_{41} = \frac{V_4 - V_1}{-j4\Omega} ; I_{43} = \frac{V_4 - V_3}{6\Omega}$$

Al aplicar la ley de corrientes de Kirchhoff en cada nodo del circuito se tiene:

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{V_1 - V_2}{8\Omega} + \frac{V_2}{-j2\Omega} - \frac{V_3 - V_2}{j5\Omega} + 4\angle 0^\circ \text{A} = 0$$

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_3 - V_2}{j5\Omega} - \frac{V_4 - V_3}{6\Omega} + 3\angle 0^\circ \text{A} = 0$$

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum I_{\textcircled{4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_4 - V_1}{-j4\Omega} + \frac{V_4 - V_3}{6\Omega} - 4\angle 0^\circ \text{A} = 0$$

Reemplazando el valor de  $V_1$  y reagrupando términos, se obtiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} -0,125 - j0,3 & -j0,2 & 0 \\ -j0,2 & -\frac{1}{6} + j0,2 & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} + j0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,75 \angle 0^\circ \\ 3 \angle 0^\circ \\ 4,71 \angle 32^\circ \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Cramer para hallar  $V_2$  se tiene:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2,75 \angle 0^\circ & -j0,2 & 0 \\ 3 \angle 0^\circ & -\frac{1}{6} + j0,2 & \frac{1}{6} \\ 4,71 \angle 32^\circ & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} + j0,25 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0,125 - j0,3 & -j0,2 & 0 \\ -j0,2 & -\frac{1}{6} + j0,2 & \frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} + j0,25 \end{vmatrix}} = 7,55 \angle 127,2^\circ \text{V}$$

Luego

$$V_0 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = 7,55 \angle 127,2^\circ \text{V}}$$

### 1.8.3. Teorema de Thévenin y Norton

Cuando el interés en el estudio de una red, se fija en una parte de la misma, por ejemplo en una rama, es interesante poder separar esta rama del resto de la red para no tener que resolver el circuito completo cada vez que se modifican los parámetros de esa rama. Los teoremas de Thévenin y Norton constituyen dos procedimientos para sustituir el resto de la red y hacer más simple el cálculo de tensiones, corrientes, etc. en la rama que se desea estudiar de un modo específico [2].

### Teorema de Thévenin

León Thévenin, un ingeniero de telégrafos francés, expresó en 1883 el siguiente enunciado: “Cualquier red lineal, compuesta de elementos pasivos y activos (independientes o dependientes) se puede sustituir (desde el punto de vista de sus terminales externos AB) por un generador de tensión  $\mathbb{V}_{Th}$  denominado generador de Thévenin, más una impedancia en serie  $\mathbb{Z}_{Th}$ ”.

La figura 1.21, dice que ambos circuitos son equivalentes y la impedancia  $\mathbb{Z}_U$  deberá tener el mismo valor de voltaje y de corriente. Para calcular los valores de  $\mathbb{V}_{Th}$  y  $\mathbb{Z}_{Th}$  basta con hacer  $\mathbb{Z}_U = \infty$  y  $\mathbb{Z}_U = 0$ .

- Hacer  $\mathbb{Z}_U = \infty$  significa desconectar físicamente la impedancia del circuito lo que dará un voltaje  $\mathbb{V}_0$  y una corriente  $\mathbb{I} = 0$  en los terminales donde estaba la carga; entonces  $\mathbb{V}_0$  será el valor de  $\mathbb{V}_{Th}$ .

- Hacer  $\mathbb{Z}_U = 0$  representa hacer un cortocircuito en los terminales donde estaba la carga, obteniéndose una corriente de corto  $\mathbb{I}_{CC}$ . El valor de  $\mathbb{Z}_{Th}$  se obtiene como cociente entre el voltaje que da el circuito en vacío  $\mathbb{V}_{Th}$  y la corriente de cortocircuito.

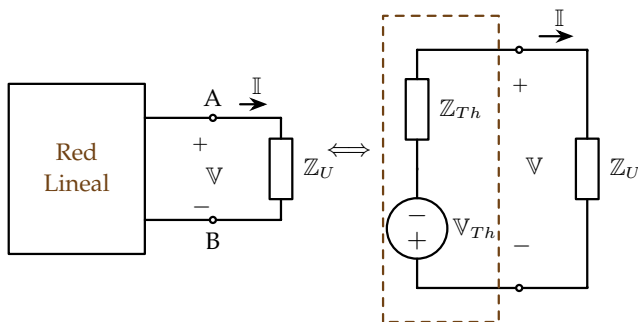


Figura 1.21. Representación del teorema de Thévenin

$$\mathbb{Z}_{Th} = \frac{\mathbb{V}_{Th}}{\mathbb{I}_{CC}}$$

Si las fuentes de la red lineal son todas independientes, el cálculo de  $\mathbb{Z}_{Th}$  es más simple y representa el valor de la impedancia que se observa entre los terminales A y B cuando se anulan las fuentes del circuito (es decir se cortocircuitan las fuentes de voltaje y se abren las de corriente). Al no existir fuentes de excitación,  $\mathbb{V}_{Th}$  será igual a cero, por lo tanto la impedancia que se observa en los terminales A y B (quitando por supuesto la carga) coincide con  $\mathbb{Z}_{Th}$ .

### Teorema de Norton

El teorema de Thévenin tiene una versión dual que es el teorema de Norton<sup>4</sup> (se acredita a E. L. Norton, científico de los Bell Telephone laboratories). En este caso, la red lineal se puede sustituir por una fuente de corriente  $\mathbb{I}_N$  en paralelo con una impedancia  $\mathbb{Z}_N$ .

Donde:

$$\mathbb{I}_N = \frac{\mathbb{V}_{Th}}{\mathbb{Z}_{Th}} = \mathbb{I}_{CC} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}_{Th}$$

<sup>4</sup>El trabajo de Norton fue publicado 50 años después que el de Thévenin.

La fuente de corriente de Norton es igual a la corriente de cortocircuito que se obtiene en la red lineal al juntar sus terminales ( $Z_U = 0$ ) y que la impedancia de Norton es el cociente entre la tensión en vacío y la corriente de cortocircuito de la red (al igual que la impedancia de Thévenin).

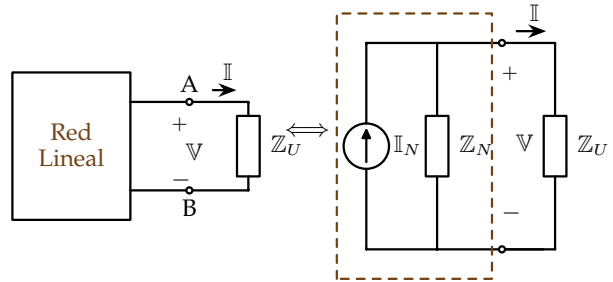


Figura 1.22. Representación del teorema de Norton

A continuación se verán algunos ejemplos de solución de circuitos eléctricos por el teorema de Thévenin y Norton.

**Ejemplo 1.11:** En el circuito de la figura 1.23 encontrar la corriente  $I_0$  que pasa por la resistencia de  $10\ \Omega$  utilizando el teorema de Thévenin.

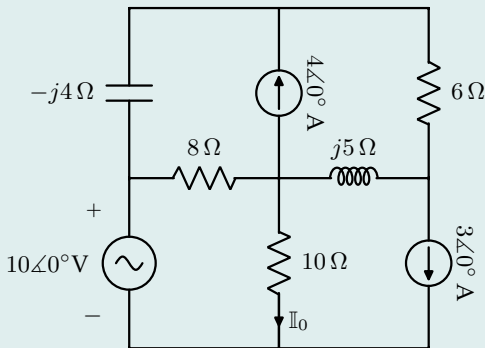


Figura 1.23. Ejemplo 1.11

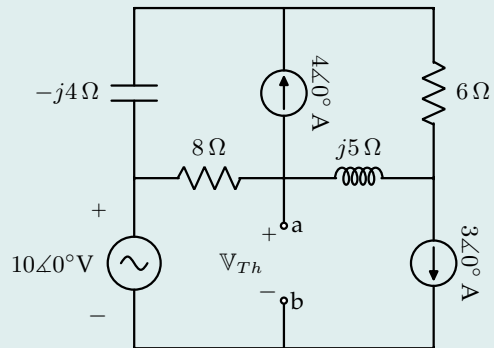


Figura 1.24. Obtención de  $V_{Th}$

### Solución:

Se puede observar que el circuito es el mismo del ejemplo 1.9, con la diferencia del resistor de  $10\ \Omega$ .

Para hallar el voltaje de Thévenin se retira la carga dejando allí el circuito abierto y mediante cualquier técnica de solución de circuitos encontrar el voltaje en los terminales ab como se ve en la figura 1.24; resolviendo el circuito se llega a que:

$$V_{Th} = 14,48 \angle -168,68^\circ \text{ V}$$

Ahora, para calcular la impedancia de Thévenin, se apagan las fuentes del circuito (cortocircuitando las de voltaje y

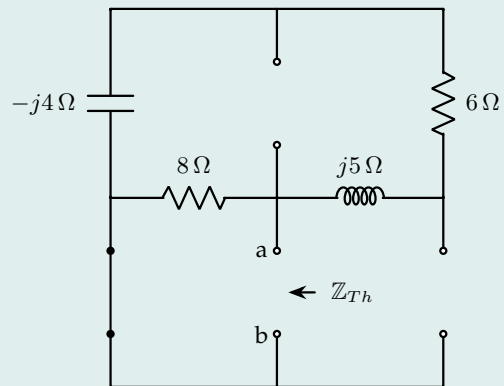


Figura 1.25. Circuito con las fuentes apagadas

abriendo las de corriente) obteniendo así el circuito de la figura 1.25, el cual se reescribe en la figura 1.26 llegando a que:

$$\mathbb{Z}_{Th} = (3,45 + j0,32)\Omega$$

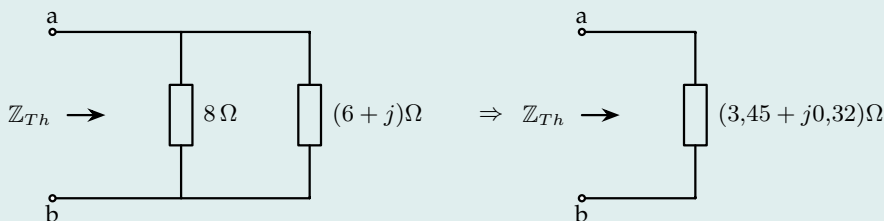


Figura 1.26. Obtención de  $\mathbb{Z}_{Th}$

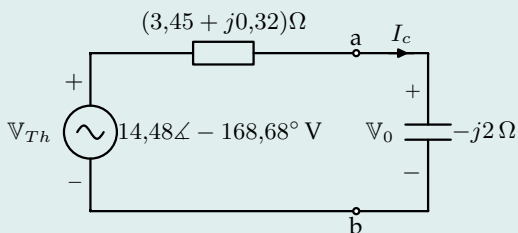
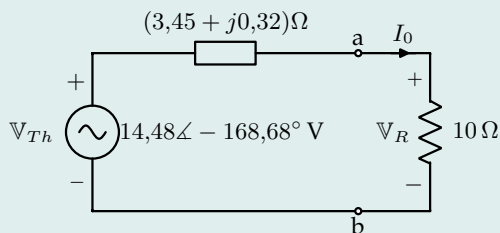
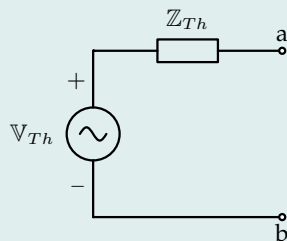
Al tener la impedancia y el voltaje de Thévenin se puede representar el equivalente.

Para obtener el valor de  $\mathbb{I}_0$  que nos piden, se conecta la resistencia en los bornes del equivalente de Thévenin y se resuelve por un divisor de tensión:

$$\mathbb{V}_R = \frac{10\Omega}{(10 + (3,45 + j0,32))\Omega} \cdot 14,48\angle -168,68^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_R = 10,76\angle -170,04^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{I}_0 = \frac{10,76\angle -170,04^\circ \text{ V}}{10\Omega} = 1,07\angle -170,04^\circ \text{ A}$$



Ahora comprobaremos el resultado del ejemplo 1.10 utilizando el capacitor de valor  $-j2\Omega$  en el equivalente de Thévenin:

$$\mathbb{V}_0 = \frac{-j2\Omega}{(-j2 + (3,45 + j0,32))\Omega} \cdot 14,48\angle -168,68^\circ \text{ V} = 7,547\angle -127,28^\circ \text{ V}$$



En conclusión el equivalente de Thévenin permite calcular el valor de voltaje y corriente en los terminales ab para cualquier carga que se conecte al circuito. Se deja como ejercicio al lector, resolver el ejemplo usando el equivalente de Norton.

**Ejemplo 1.12:** Determine el equivalente de Thévenin y Norton para el circuito de la figura 1.27 visto desde los terminales a-b.

**Solución:**

• Equivalente de Thévenin:

Primero se hallará el voltaje de Thévenin, esto se hace hallando el voltaje que existe entre los terminales a-b, solucionando el circuito por cualquier técnica. En este caso el  $V_{Th}$  obtenido es:

$$V_{Th} = 7,35 \angle 72,9^\circ \text{ V}$$

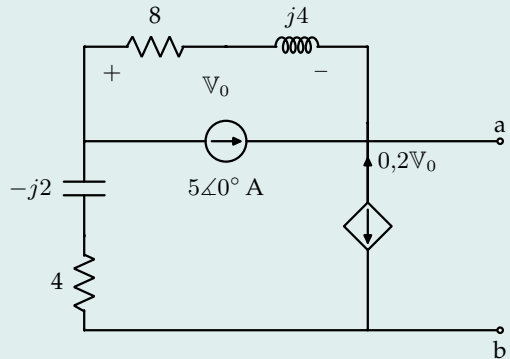


Figura 1.27. Ejemplo 1.12

Debido a que el circuito posee una fuente dependiente (la cual no se puede apagar) no se puede hallar una impedancia equivalente entre los terminales como se hizo en el ejemplo anterior; lo que se hará entonces es utilizar el método de la corriente de prueba, que consiste en conectar ya sea una fuente de voltaje o corriente en los terminales donde se desea encontrar la impedancia de Thévenin y luego de hallar la corriente o voltaje según sea el caso, se obtiene  $Z_{Th}$  haciendo el cociente entre el voltaje y la corriente en la fuente de prueba.

La fuente de prueba puede ser de cualquier valor en nuestro caso utilizaremos una fuente de  $1 \angle 0^\circ \text{ V}$  para no complicar el circuito, también se debe tener en cuenta apagar las fuentes dependientes ya que lo que se quiere encontrar es la impedancia de Thévenin, haciendo lo anterior se obtiene el circuito de la figura 1.28 y de este se tiene que:

$$I_p = 0,223 \angle 7,64^\circ \text{ A}$$

$$\text{Luego: } Z_{Th} = \frac{1 \angle 0^\circ \text{ V}}{0,223 \angle 7,64^\circ \text{ A}}$$

$$Z_{Th} = 4,47 \angle -7,64^\circ \Omega$$

El equivalente de Thévenin se puede observar en la figura 1.29(A).

• Equivalente de Norton:

Para hallar la corriente de Norton se cortocircuitan los terminales a-b y se encuentra la corriente  $I_N$  que pasa por allí;

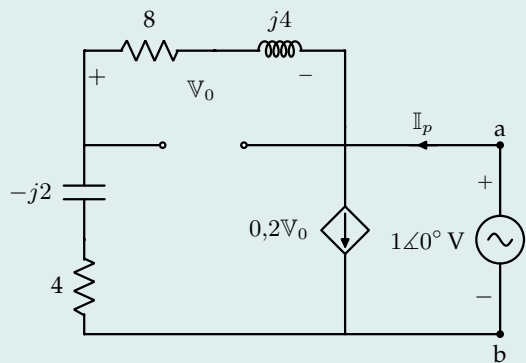


Figura 1.28. Cálculo de  $Z_{Th}$

al resolver el circuito se obtiene que:

$$\mathbb{I}_N = 1,64 \angle 80,53^\circ \text{ A}$$

La impedancia de Norton se calcula igual que la de Thévenin lo que quiere decir que:

$$\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}_{Th}$$

El equivalente de Norton se puede observar en la figura 1.29(B)

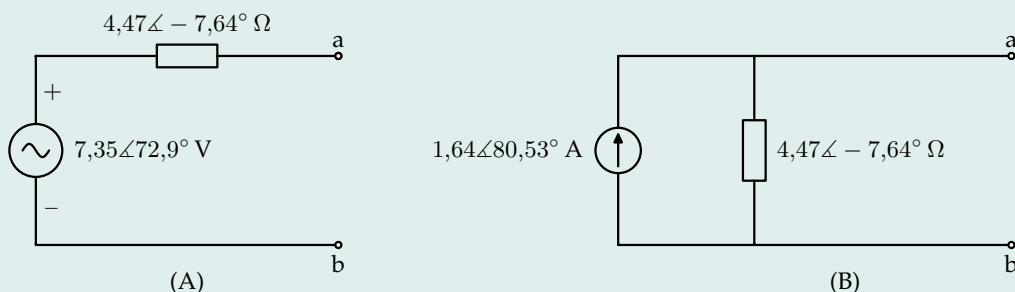


Figura 1.29. Equivalentes de Thévenin y Norton

### 1.8.4. Principio de superposición

Este principio se aplica a circuitos lineales tiene por objeto calcular la respuesta en un elemento del circuito, cuando existen varias fuentes y dice lo siguiente:

*“La respuesta de un circuito lineal, a varias fuentes de excitación actuando simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas que se obtendrían cuando actuase cada una de ellas por separado”[2].*

El principio de superposición ayuda a analizar un circuito lineal con más de una fuente independiente, mediante el cálculo de la contribución de cada fuente independiente por separado. Sin embargo, al aplicarlo deben tenerse en cuenta dos cosas:

- Las fuentes independientes se consideran una a la vez mientras todas las demás fuentes independientes están apagadas. Esto implica cortocircuitar las fuentes de voltaje y abrir las de corriente. De este modo se obtiene un circuito más simple y manejable.
- Las fuentes dependientes se dejan intactas, porque las controlan variables de circuitos.

Con esto en cuenta el principio de superposición se aplica en tres pasos:

1. Apague todas las fuentes independientes, excepto una. Determine la salida (vol-

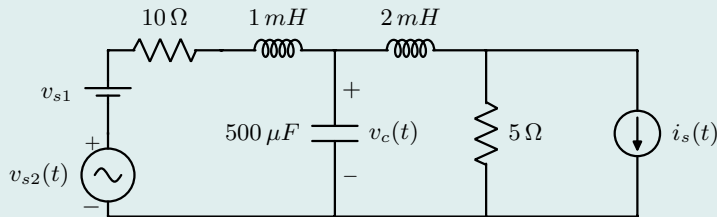
taje o corriente) debida a esa fuente activa, resolviendo por cualquier método de solución de circuitos.

2. Repita el paso 1 en cada una de las demás fuentes independientes.
3. halle la contribución total sumando algebraicamente todas las contribuciones debidas a las fuentes independientes [3].

Este principio es muy útil cuando se tiene un circuito excitado por varias fuentes de diferente frecuencia.

**Ejemplo 1.12** Para el circuito de la figura, encontrar el valor de  $v_C(t)$  aplicando el principio de superposición, si las fuentes tienen los siguientes valores:

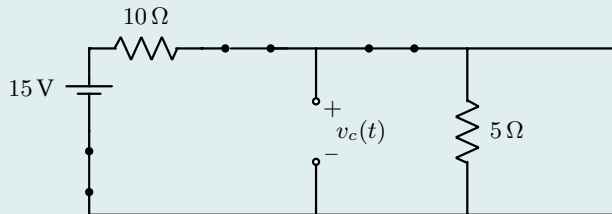
$$v_{s1} = 15 \text{ V} \quad , \quad v_{s2}(t) = 20 \cos 1000t \text{ V} \quad , \quad i_s(t) = 4 \cos 2000t \text{ A}$$



**Solución:**

- Apagando  $v_{s2}(t)$  e  $i_s(t)$ :

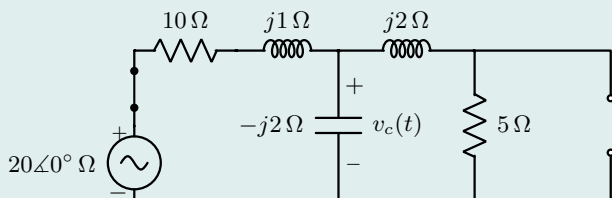
En este caso la frecuencia de la fuente es 0, por lo tanto las impedancias de las bobinas son nulas ( $\omega L = 0$ ), es decir actúa como un cortocircuito y la impedancia del condensador es infinita ( $1/\omega C = \infty$ ) que representa un circuito abierto. Obteniendo así el siguiente circuito equivalente:



Obteniendo que:  $v_c(t) = 5 \text{ V}$

- Apagando  $v_{s1}(t)$  e  $i_s(t)$ :

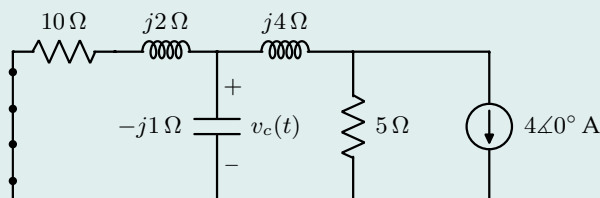
La fuente de voltaje tiene una frecuencia angular de  $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$ , al aplicar el método fasorial se obtiene el siguiente circuito equivalente:



Resolviendo el circuito se obtiene que:  $\mathbb{V}_c = 3,97\angle -62,91^\circ \text{ V}$   
 En el dominio del tiempo sería:  $v_c(t) = 3,97 \cos(1000t - 62,91^\circ) \text{ V}$

• Apagando  $v_{s1}(t)$  e  $v_{s2}(t)$ :

La fuente de voltaje tiene una frecuencia angular de  $\omega = 2000 \text{ rad/seg}$ , al aplicar el método fasorial se obtiene el siguiente circuito equivalente:



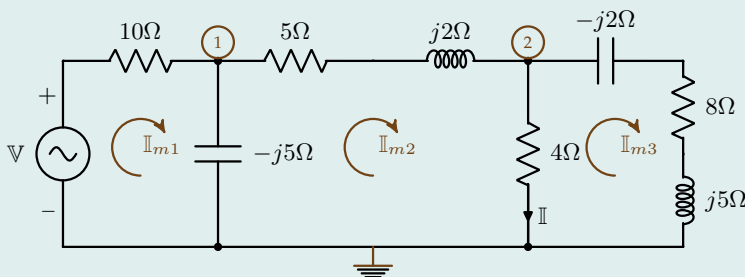
Resolviendo el circuito se obtiene que:  $\mathbb{V}_c = 3,433\angle -114,8^\circ \text{ V}$   
 En el dominio del tiempo sería:  $v_c(t) = 3,433 \cos(2000t - 114,8^\circ) \text{ V}$

Ya teniendo el resultado de  $v_c(t)$  para cada fuente independiente, se obtiene el valor final sumando las respuestas obtenidas en el análisis de cada fuente por separado, entonces:

$$v_c(t) = [15 + 3,97 \cos(1000t - 62,91^\circ) + 3,433 \cos(2000t - 114,8^\circ)] \text{ V}$$

El siguiente ejemplo se resolverá utilizando varias de las técnicas ya vistas.

**Ejemplo 1.13** En el circuito de la figura, determinar el voltaje de la fuente  $\mathbb{V}$ , si la corriente  $\mathbb{I}$  es igual a  $3\angle 45^\circ \text{ A}$ .



Usando:

- Corrientes de malla
- Voltajes de nodo
- Thévenin (pruebas separadas)

**Solución:**

**a. Corrientes de malla:** Describiendo el sistema usando como incógnitas las corrientes de malla  $\mathbb{I}_{m1}$ ,  $\mathbb{I}_{m2}$  e  $\mathbb{I}_{m3}$ .

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \bigg\downarrow \sum \mathbb{V}_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V} = 10 \cdot \mathbb{I}_{m1} - j5(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) \quad (1.49)$$

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \bigg\downarrow \sum \mathbb{V}_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad -j5(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m1}) + (5 + j2)\mathbb{I}_{m2} + 4(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3}) = 0 \quad (1.50)$$

$$\begin{array}{c} - \\ + \end{array} \bigg\downarrow \sum \mathbb{V}_{m3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(\mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m2}) + (-j2 + 8 + j5)\mathbb{I}_{m3} = 0 \quad (1.51)$$

Además:

$$\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3} = \mathbb{I} = 3\angle 45^\circ \text{ A}$$

de la ecuación (1.51):

$$4(-3\angle 45^\circ) + (8 + j3) \cdot \mathbb{I}_{m3} = 0$$

$$\mathbb{I}_{m3} = \frac{12\angle 45}{8 + j3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{I}_{m3} = 1,44\angle 24,24 \text{ A}}$$

Luego:

$$\mathbb{I}_{m2} = 3\angle 45 + \mathbb{I}_{m3} = 3\angle 45 + 1,44\angle 24,24$$

$$\boxed{\mathbb{I}_{m2} = 4,34\angle 38,48 \text{ A}}$$

De la ecuación (1.50):

$$\begin{aligned} -j5\mathbb{I}_{m2} + j5\mathbb{I}_{m1} + (5 + j2)\mathbb{I}_{m2} + 4(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3}) &= 0 \\ j5\mathbb{I}_{m1} &= j5\mathbb{I}_{m2} - (5 + j2)\mathbb{I}_{m2} - 4(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m3}) \\ j5\mathbb{I}_{m1} &= (-9 + j3)\mathbb{I}_{m2} + 4\mathbb{I}_{m3} \\ j5\mathbb{I}_{m1} &= (-9 + j3)(4,34\angle 38,48) + 4(1,44\angle 24,24) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{I}_{m1} = 7,086\angle 109,36^\circ \text{ A}}$$

Finalmente, de la ecuación (1.49):

$$\begin{aligned}\mathbb{V} &= 10 \cdot \mathbb{I}_{m1} - j5(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) \\ \mathbb{V} &= 10(7,086 \angle 109,36) - j5(7,086 \angle 109,36 - 4,34 \angle 38,48)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V} = 95,65 \angle 92,13^\circ \text{ V}}$$

**b. Voltajes de nodo:** Describiendo el circuito usando como incógnitas los voltajes de nodo  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{V}_1$  y  $\mathbb{V}_2$ .

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum \mathbb{I}_{\textcircled{1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}}{10} + \frac{\mathbb{V}_1}{-j5} + \frac{\mathbb{V}_1 - \mathbb{V}_2}{5 + j2} = 0 \quad (1.52)$$

$$\bullet \xrightarrow{+} \sum \mathbb{I}_{\textcircled{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbb{V}_2 - \mathbb{V}_1}{5 + j2} + \frac{\mathbb{V}_2}{4} + \frac{\mathbb{V}_2}{8 + j2} = 0 \quad (1.53)$$

Además, se sabe que:

$$\mathbb{V}_2 = 4 \cdot \mathbb{I} = 4 \Omega \cdot (3 \angle 45^\circ \text{ A})$$

$$\boxed{\mathbb{V}_2 = 12 \angle 45^\circ \text{ V}}$$

de la ecuación (1.53):

$$\left( \frac{1}{5 + j2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8 + j2} \right) \mathbb{V}_2 = \frac{\mathbb{V}_1}{5 + j2}$$

$$6,58 \angle 34,67 = \frac{\mathbb{V}_1}{5 + j2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}_1 = 35,47 \angle 56,47^\circ \text{ V}}$$

de la ecuación (1.52):

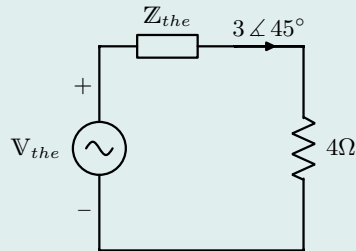
$$\left( \frac{1}{10} + \frac{1}{-j5} + \frac{1}{5 + j2} \right) \mathbb{V}_1 - \frac{\mathbb{V}_2}{5 + j2} = \frac{\mathbb{V}}{10}$$

$$(0,3022 \angle 25,68) \mathbb{V}_1 - \frac{12 \angle 45}{5 + j2} = \frac{\mathbb{V}}{10}$$

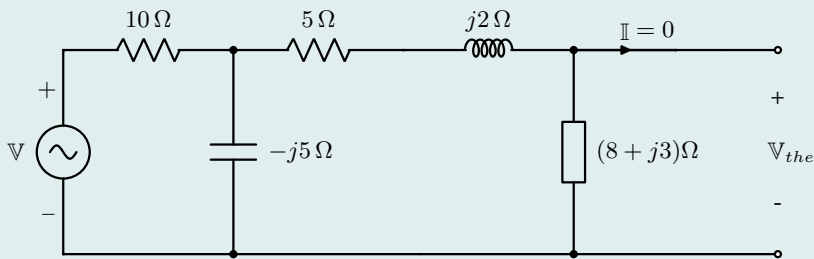
$$10,72 \angle 82,15 - 2,22 \angle 23,19 = \frac{\mathbb{V}}{10}$$

$$\boxed{\mathbb{V} = 97,61 \angle 93,43^\circ \text{ V}}$$

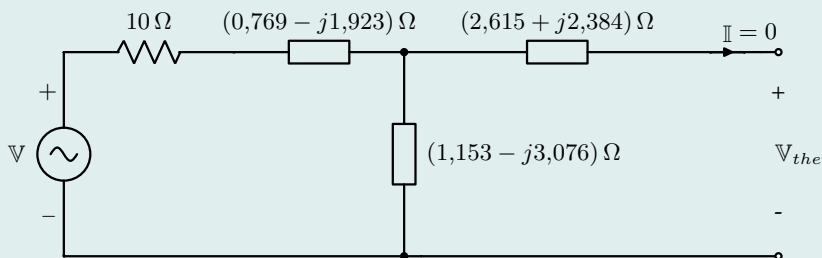
**c. Thévenin (pruebas separadas):** El circuito se reduce a la forma  $\mathbb{V}_{the} = f(\mathbb{V})$



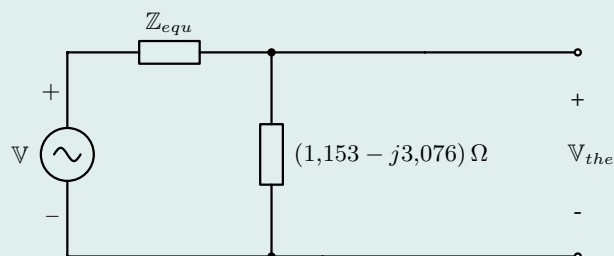
• Cálculo de  $\mathbb{V}_{the}$ :



Utilizando la conversión delta-estrella (ver apéndice A.2.1), se obtiene el siguiente circuito equivalente:



La impedancia  $(2,615 + j2,384) \Omega$  se desprecia por que la corriente por ella es cero; dado esto, el circuito anterior, se puede reducir:



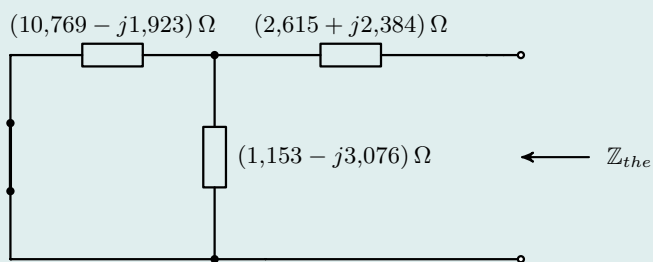
Donde:

$$\mathbb{Z}_{equ} = 10 + (0,769 - j1,923) = 10,939 \angle -10,12$$

$$\mathbb{V}_{the} = \frac{1,153 - j3,076}{\mathbb{Z}_{equ} + (1,153 - j3,076)} \cdot \mathbb{V} = \frac{3,286 \angle -69,44}{12,927 \angle -22,75} \cdot \mathbb{V}$$

$$\mathbb{V}_{the} = (0,254 \angle -46,69) \cdot \mathbb{V}$$

• Cálculo de  $\mathbb{Z}_{the}$ :



$$\mathbb{Z}_{the} = [(10,769 - j1,923) \parallel (1,153 - j3,076)] + (2,615 + j2,384)$$

$$\mathbb{Z}_{the} = \frac{(10,769 - j1,923)(1,153 - j3,076)}{(10,769 - j1,923) + (1,153 - j3,076)} + (2,615 + j2,384) = 4,14 \angle 0,8^\circ \Omega$$

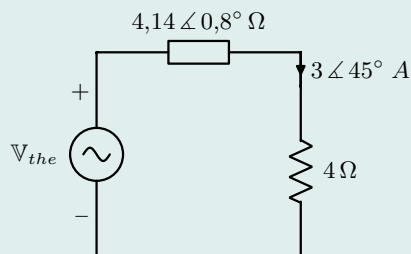
Luego:

$$\mathbb{V}_{the} = 3 \angle 45^\circ (\mathbb{Z}_{the} + 4) = 24,41 \angle 45,4^\circ \text{ V}$$

Finalmente:

$$\mathbb{V} = \frac{\mathbb{V}_{the}}{(0,254 \angle -46,69)}$$

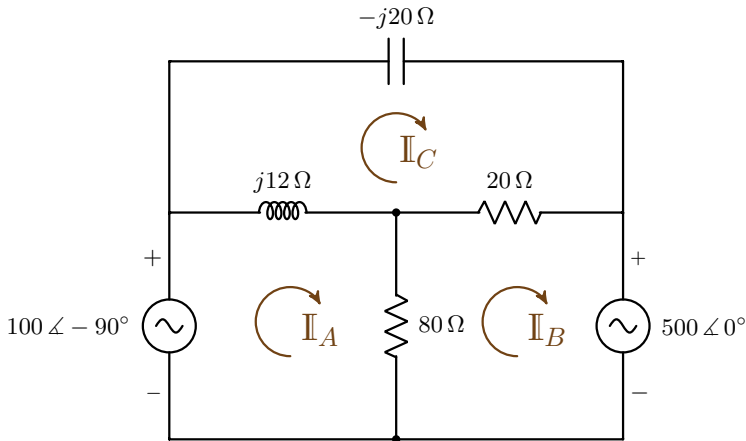
$$\mathbb{V} = 96,1 \angle 92,09^\circ \text{ V}$$



## 1.9. Método fasorial en Matlab

[7] Se verá como se puede resolver un circuito eléctrico usando Matlab, para ello se utilizará el circuito en el dominio fasorial de la siguiente figura:





Nombrando los voltajes como:  $V_A = 100 \angle -90^\circ V$ ,  $V_B = 500 \angle 0^\circ V$  y utilizando el método de corrientes de mallas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_A &= j12(I_A - I_C) + 80(I_A - I_B) \\ -V_B &= 80(I_B - I_A) + 20(I_B - I_C) \\ 0 &= -j20 \cdot I_C + 20(I_C - I_B) + j12(I_C - I_A) \end{aligned}$$

Ahora bien, en Matlab se empieza por definir una matriz de voltajes así:

```
1 >> V = [100; -500; 0].*exp(j*gar([-90; 0; 0]));
```

Donde el operador de multiplicación punto por punto “.” es utilizado en vez del operador de multiplicación “\*” pero teniendo en cuenta que la magnitud y la fase tengan la misma dimensión. La instrucción “gar” se utiliza para cambiar de grados a radianes y ya se había visto en la sección 1.2.4.

Si se quiere sacar la lista de voltajes en su forma polar, se escribe en Matlab la siguiente instrucción:

```
1 >> [abs(V) rag(angle(V))]  
2 ans =  
3      100      -90  
4      500      180  
5       0       0
```

La matriz de impedancias se arma desde el sistema de ecuaciones obtenido del método de corrientes de malla así:

```
1 >> Z = [ 12i+80, -80, -12i  
2        -80, 80+20, -20  
3        -12i, -20, -20i+20+12i];
```

Sabiendo que  $V = ZI$ , entonces:  $I = Z^{-1}V$ . Al usar Matlab para calcular las corrientes se obtiene:

```

1 >> I=Z\V;
2
3 >> [abs(I) rag(angle(I))]
4 ans =
5      22.0227  -129.4725
6      24.0208  -129.2558
7      25.4951  -78.6901

```

También se puede usar  $I = \text{inv}(Z) * V$ , que es más preciso.

Finalmente los valores de las corrientes de malla son:

$$I_A = 22,0 \angle -129,5^\circ \text{ A}$$

$$I_B = 24,0 \angle -129,3^\circ \text{ A}$$

$$I_C = 25,5 \angle -78,7^\circ \text{ A}$$

Adicionalmente a las funciones `gar` y `rag` definidas en la sección 1.2.4, se puede definir otras dos funciones para ingresar de manera más fácil un número complejo en forma polar y con el ángulo en grados. Dichas funciones son:

```

1 >> to_rd = @(m, d) m .* exp(j*gar(d));    % Función para pasar de polar a
2                                           rectangular
3 >> to_pd = @(x) [abs(x) rag(angle(x))];    % Función para pasar de rectangular
4                                           a polar

```

Si se quiere pasar el fasor  $2 \angle 45^\circ$  a su equivalente rectangular, se escribe en Matlab:

```

1 >> x = to_rd(2,45)
2 x =
3      1.4142 + 1.4142i

```

Ahora si se quiere obtener de `x` su forma polar, se escribe en Matlab:

```

1 >> to_pd(x)
2 ans =
3      2      45

```

En el caso de tener un número complejo en forma rectangular y otro en forma polar, al momento de hacer alguna operación con esta combinación de números complejos se pueden utilizar las funciones para resolverlas así:

```

1 >> z = (7+8*i + to_rd(20, -30))/to_rd(5, 45)
2 z =
3      3.1566 - 3.7223i

```

Para obtener el resultado en forma polar se escribe en Matlab:

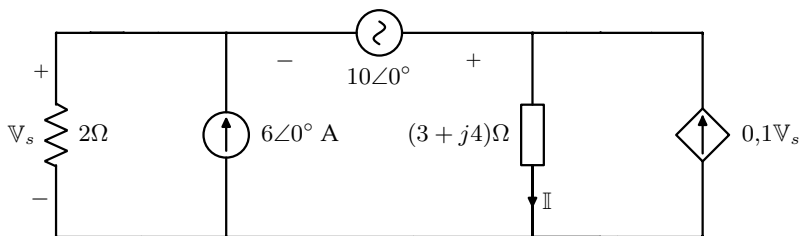
```

1 >> to_pd(z)
2 ans =
3      4.8805  -49.7011

```

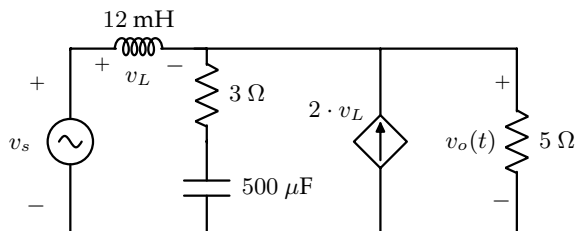
## 1.10. Ejercicios propuestos

- Sean los números complejos  $Z_0 = 3 \angle 10^\circ$  y  $Z_1 = -4 \angle -40^\circ$  realizar las siguientes operaciones:
  - Pasarlos a su representación cartesiana y exponencial.
  - Resolver:  $Z_0 \cdot Z_1$  ;  $\frac{Z_1}{Z_0}$  y  $-Z_1 \cdot Z_0^*$
  - Sumar  $Z_0 + Z_1$  y representarlo en forma gráfica.
- Sean los números complejos  $Z_2 = 5 - 2j$  y  $Z_3 = -3 + 4j$  realizar las siguientes operaciones:
  - Pasarlos a su representación polar y exponencial.
  - Resolver:  $Z_2 \cdot Z_3$  ;  $\frac{Z_3}{Z_2}$  y  $-Z_3 \cdot Z_2^*$
  - Sumar  $Z_2 + Z_3$  y representarlo en forma gráfica.
- Resolver las siguientes ecuaciones complejas:
  - $V_0 \angle 40^\circ = V_1 \angle 20^\circ + 30 \angle 60^\circ$
  - $20 \angle \beta = 25 \angle 150^\circ + V \angle 60^\circ$
- Hacer todos los ejercicios anteriores en Matlab.
- Representar en función de fasor (asuma que  $\omega$  es conocido):
  - La corriente  $i(t) = 5 \cdot \sin(\omega t + 45^\circ)$  A
  - El voltaje  $v(t) = 2 \cdot \cos(\omega t + 30^\circ)$  V
- Determinar la derivada respecto al tiempo de  $V(t) = V_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$
- Si  $i_1(t) = 20 \cdot \sin(\omega t + 60^\circ)$  A e  $i_2(t) = 5 \cdot \sin(\omega t + 15^\circ)$  A calcular:
  - $i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$
  - $i_4(t) = i_1(t) + \frac{d}{dt}i_2(t)$
- Calcule la corriente  $\mathbb{I}$  usando a) Corrientes de malla, b) Voltajes de nodo, c) Thévenin, d) Norton.



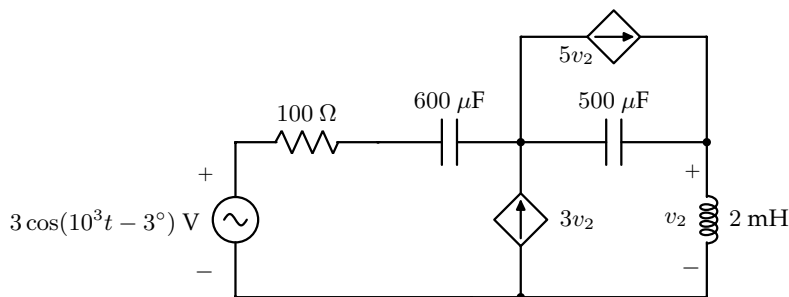
Respuesta:  $\mathbb{I} = 3,676 \angle -36,027^\circ$  A

9. En el circuito de la siguiente figura  $v_s(t) = 70\cos(1000t - 30^\circ)$  V. Hallar  $v_o(t)$  en régimen permanente empleando: a) Corrientes de malla, b) Voltajes de nodo, c) Thévenin, d) Norton.



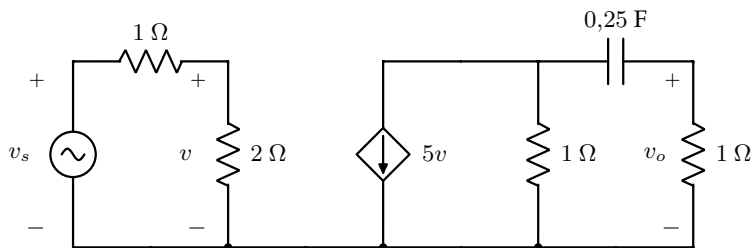
Respuesta:  $v_o(t) = 57,62 \cos(1000t - 34,04^\circ)$  V

10. En el circuito de la figura, determinar la tensión  $v_2$  en régimen permanente usando: a) Corrientes de malla, b) Voltajes de nodo, c) Thévenin, d) Norton.



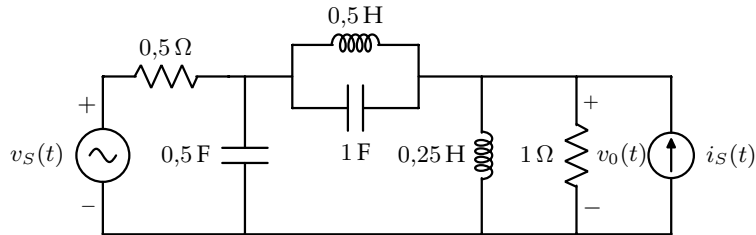
Respuesta:  $v_2(t) = 0,0098 \cos(1000t + 166,64^\circ)$  V

11. En el circuito de la figura  $v_s(t) = 10\sin(2t)$  V. Hallar  $v_o(t)$  en régimen permanente empleando Thévenin (pruebas separadas). Hallar  $\mathbb{I}_{Norton}$  y verificar que  $\mathbb{V}_{The} = \mathbb{I}_{Norton} \cdot \mathbb{Z}_{The}$



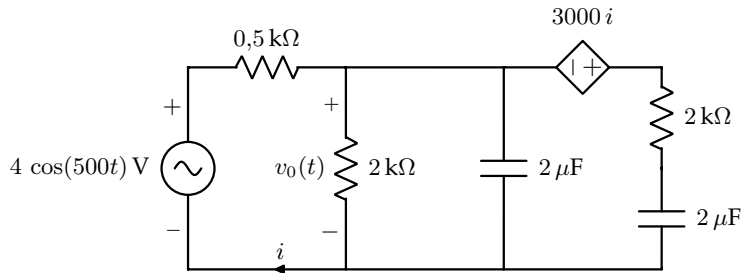
Respuesta:  $v_o(t) = 11,785 \sin(2t - 135^\circ)$  V ;  $\mathbb{I}_N = 14,9 \angle -116,5^\circ$  A

12. Del circuito de la figura se tiene que:  $v_S(t) = 5 \cos(2t) \text{ V}$  e  $i_S(t) = 5 \cos(2t) \text{ A}$ ; Hallar  $v_0(t)$  en régimen permanente sinusoidal, usando la técnica de voltajes de nodo.



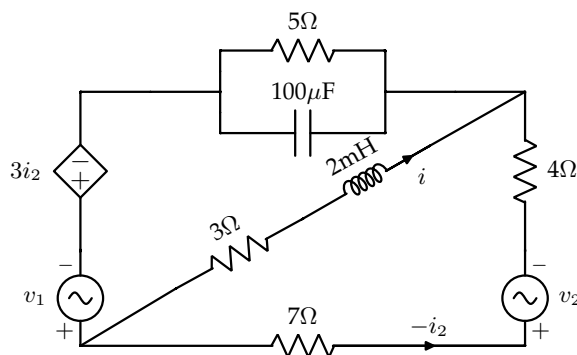
Respuesta:  $v_0(t) = 4,47 \cos(2t + 63,43) \text{ V}$

13. Del circuito de la figura, calcular  $v_0(t)$  en régimen permanente, utilizando el teorema de Thévenin (pruebas separadas).



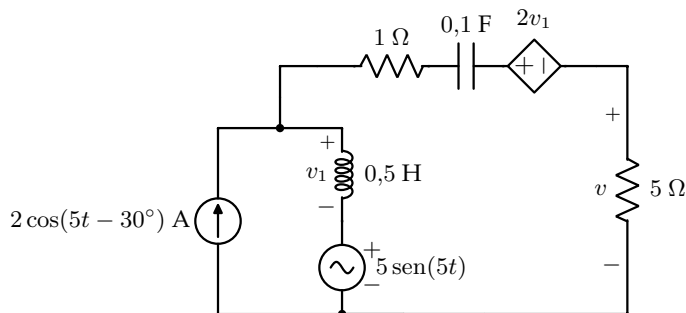
Respuesta:  $v_0(t) = 10,12 \cos(500t - 108,44) \text{ V}$

14. En el circuito de la figura,  $v_1 = 20 \sin(2000t)$  y  $v_2 = 10 \cos(2000t - 60^\circ)$ . Hallar  $i$  en régimen permanente usando a) Corrientes de malla, b) Voltajes de nodo, c) Thévenin, d) Norton, e) Superposición.



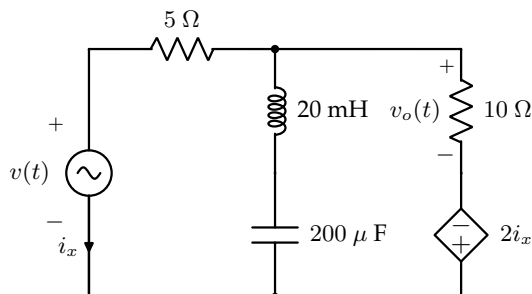
Respuesta:  $i(t) = 3,308 \cos(2000t - 101,83^\circ) \text{ V}$

15. En el circuito de la figura, calcular en régimen permanente el voltaje  $v$  usando a) Corrientes de malla, b) Voltajes de nodo, c) Thévenin, d) Norton, e) Superposición.



Respuesta:  $v(t) = 11,97 \cos(5t + 24,85^\circ) \text{ V}$

16. Dado  $v(t) = 12 \cos(377t) \text{ V}$ , hallar en régimen permanente  $v_o(t)$  utilizando Thévenin pruebas separadas. Calcule la corriente de Norton ( $\mathbb{I}_n$ ) y verifique que  $\mathbb{I}_n = \mathbb{V}_t / \mathbb{Z}_t$ , donde  $\mathbb{V}_t$  y  $\mathbb{Z}_t$  son el voltaje y la impedancia de Thévenin respectivamente.



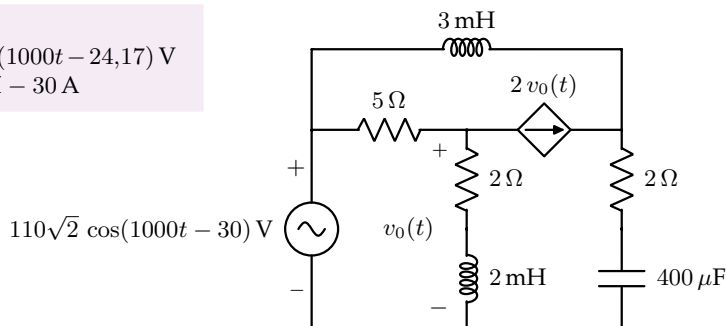
Respuesta:  $v_o(t) = 8,115 \cos(377t - 14,65^\circ) \text{ V}$ ;  $\mathbb{I}_N = 4,237 \angle 19,27^\circ \text{ A}$

17. Para el circuito de la figura hallar  $v_o(t)$  en régimen permanente usando: a) Nodos. b) Thévenin (pruebas separadas) y hallar el valor de  $\mathbb{I}_{Norton}$  por esta rama.

Respuesta:

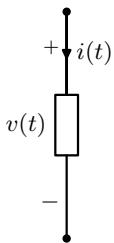
$$v_o(t) = 12,63 \cos(1000t - 24,17^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbb{I}_{Norton} = 31,11 \angle -30^\circ \text{ A}$$



# 2

## Potencia en régimen permanente sinusoidal



Sea la carga de la figura de la izquierda donde el voltaje y la corriente están representados por:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \text{ V} \quad \text{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \text{ A}$$

Donde:  $V_m, I_m$  : Valores pico  
 $\theta_v, \theta_i$  : Fases de  $v$  y de  $i$

Nótese que: Las fases  $\theta_v, \theta_i$  se miden o se indican con la misma función, en este caso, la función coseno.

### 2.1. Potencia instantánea en régimen permanente

La *potencia instantánea* que se denota  $p(t)$  (función del tiempo) es la potencia entregada a un dispositivo en cualquier instante de tiempo y se determina como:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad [\text{Watts}]$$

En un tiempo dado ( $t_o$ ) en referencia normal, si la potencia es positiva está siendo absorbida y si la potencia es negativa está siendo generada.

$$\begin{aligned} p(t_o) > 0 &\Rightarrow \text{Absorbida} \\ p(t_o) < 0 &\Rightarrow \text{Generada} \end{aligned}$$

Reemplazando  $v(t)$  e  $i(t)$  en la potencia instantánea:

$$p(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \cdot I_m \cos(\omega t + \theta_i) = V_m \cdot I_m \cdot \cos(\omega t + \theta_v) \cdot \cos(\omega t + \theta_i)$$

Al aplicar una identidad trigonométrica<sup>1</sup> se tiene:

$$p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} [\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i)]$$

Recordemos que:  $\theta_z = \theta_v - \theta_i$  donde  $\theta_z$  es el ángulo de la impedancia de la carga.

Al remplazar ( $\theta_i = \theta_v - \theta_z$ ) se tiene:

$$p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} [\cos(2\omega t + 2\theta_v - \theta_z) + \cos\theta_z] = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \{\cos [2(\omega t + \theta_v) - \cos \theta_z]\}$$

Aplicando una identidad trigonométrica<sup>2</sup> se tiene:

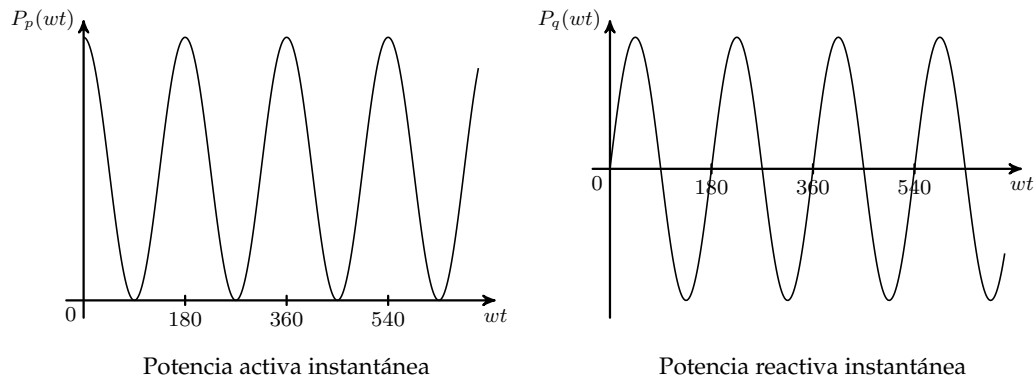
$$p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \{\cos [2(\omega t + \theta_v)] \cos(\theta_z) + \sin [2(\omega t + \theta_v)] \sin(\theta_z) + \cos(\theta_z)\}$$
$$p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cos(\theta_z) \{1 + \cos [2(\omega t + \theta_v)]\} + \frac{V_m \cdot I_m}{2} \sin(\theta_z) \sin [2(\omega t + \theta_v)]$$

Nótese que:  $p(t) = p_p(t) + p_q(t)$

Donde:

$$p_p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cos(\theta_z) \{1 + \cos [2(\omega t + \theta_v)]\} \quad \text{Potencia activa instantánea}$$
$$p_q(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \sin(\theta_z) \sin [2(\omega t + \theta_v)] \quad \text{Potencia reactiva instantánea}$$

De forma gráfica:



Casos particulares para la potencia instantánea		
R	L	C
$\theta_z = 0^\circ$	$\theta_z = 90^\circ$	$\theta_z = -90^\circ$
$P_p(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \{1 + \cos[2(\omega t + \theta_v)]\}$	$P_p(t) = 0$	$P_p(t) = 0$
$P_q(t) = 0$	$P_q(t) = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \sin[2(\omega t + \theta_v)]$	$P_q(t) = -\frac{V_m \cdot I_m}{2} \sin[2(\omega t + \theta_v)]$

<sup>1</sup> $\cos(a) \cdot \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$   
<sup>2</sup> $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$



## 2.2. Cantidades de potencia

En régimen permanente sinusoidal, se definen las siguientes cantidades de potencia:

**Potencia activa:** Se denota con la letra  $\underline{P}$  y la unidad es el vatio; se define como:

$$P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \theta_z \quad [\text{Watts}]$$

**Potencia reactiva:** Se denota con la letra  $\underline{Q}$  y su unidad es el voltio-amperio reactivo; se define como:

$$Q = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin \theta_z \quad [\text{VAr}]$$

**Potencia aparente:** Se denota con la letra  $\underline{S}$  y su unidad es el voltio-amperio; se define como:

$$S = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \quad [\text{VA}]$$

También se puede representar como:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

**Factor de potencia:** Se denota con las letras  $\underline{FP}$  y es a-dimensional; se define como:

$$FP = \frac{P}{S} \quad [\text{a-dimensional}]$$

Al hacer la operación  $P/S$  se llega a que:

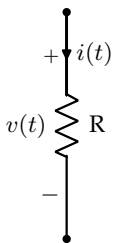
$$FP = \cos \theta_z$$

Debido a que  $\cos(\theta_z) = \cos(-\theta_z)$ , se dice que el FP está en adelanto o en atraso, donde estos dos términos hacen referencia al ángulo de la corriente  $\theta_i$  respecto al ángulo de voltaje  $\theta_v$ .

$$\text{Sí } \theta_v > \theta_i \implies \theta_z > 0 \implies \text{FP en atraso} \equiv \text{FP} \downarrow$$

$$\text{Sí } \theta_i > \theta_v \implies \theta_z < 0 \implies \text{FP en adelanto} \equiv \text{FP} \uparrow$$

## 2.3. Potencia para los elementos básicos de circuito



**Resistencia:**

$$\theta_z = 0^\circ \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_z = 1 \\ \sin \theta_z = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \cos \theta_z \rightarrow 1$$

Al reemplazar  $V_m = R \cdot I_m$  se llega a:

$$P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{1}{2} R \cdot I_m^2$$

$$Q = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \sin \theta_z \rightarrow 0$$

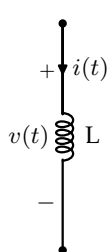
La potencia reactiva de la resistencia es *cero*.

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = P$$

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{P}{P} = 1$$

El máximo factor de potencia en una carga ocurre cuando la carga es *puramente resistiva*.

En régimen permanente:  $p(t) = P\{1 + \cos[2(\omega t + \theta_v)]\} + 0$



**Inductancia:**

$$\theta_z = 90^\circ \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_z = 0 \\ \sin \theta_z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \overset{1}{\text{sen } \theta_z}$$

Al reemplazar  $V_m = X_L \cdot I_m$  con  $X_L = \omega L$

Se llega a: 
$$Q = \frac{V_m^2}{2X_L} = \frac{1}{2} X_L \cdot I_m^2$$

$$P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \overset{0}{\cos \theta_z} = 0$$

La potencia activa de la inductancia es *cero*.

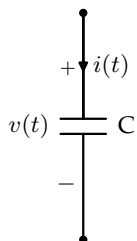
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = Q$$

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{0}{Q} = 0 \downarrow$$

Significa que la carga es *puramente inductiva*.

En régimen permanente:  $p(t) = Q \text{sen}[2(\omega t + \theta_v)]$

**Capacitancia:**



$$\theta_z = -90^\circ \rightarrow \begin{cases} \cos \theta_z = 0 \\ \sin \theta_z = -1 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \overset{-1}{\text{sen } \theta_z}$$

Al reemplazar  $V_m = X_C \cdot I_m$  con  $X_C = \frac{1}{\omega C}$

Se llega a: 
$$Q = -\frac{V_m^2}{2X_C} = -\frac{1}{2} X_C \cdot I_m^2$$

*Nota: El capacitor entrega potencia reactiva.*

$$P = \frac{V_m \cdot I_m}{2} \cdot \overset{0}{\cos \theta_z} = 0$$

La potencia activa del capacitor es *cero*.

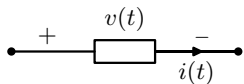
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = |Q|$$

$$FP = \frac{P}{S} = \frac{0}{|Q|} = 0 \uparrow$$

Significa que la carga es *puramente capacitiva*.

En régimen permanente:  $p(t) = Q \text{sen}[2(\omega t + \theta_v)]$  donde  $\boxed{Q < 0}$

Sea la carga de la figura de la izquierda donde el voltaje y la corriente están representados por:



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) \text{ V} \quad \text{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i) \text{ A}$$

Donde:  $V_m, I_m$  : Valores pico  
 $\theta_v, \theta_i$  : Fases de  $v$  y de  $i$

Nótese que: Las fases  $\theta_v, \theta_i$  se miden o se indican con la misma función, en este caso, la función coseno.

## 2.4. Valor eficaz o rms (root mean squared) de una función periódica

Sea  $f(t)$  una función periódica cada  $T$  segundos, se define el valor eficaz de  $f(t)$  como:

$$F_{rms} = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

donde  $t_0$  es un tiempo arbitrario (por lo común  $t_0 = 0$ ). Las unidades de  $F_{rms}$  son las mismas unidades de  $f(t)$ .

**Ejemplo 2.1:** Calcular el valor eficaz o rms del voltaje  $v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta)$

**Solución:** Teniendo que  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$V_{rms} = \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} V_m^2 \cdot \sin^2(\omega t + \theta) dt \right]^{\frac{1}{2}} = V_m \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin^2(\omega t + \theta) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

Haciendo un cambio de variable:  $x = \omega t + \theta$  ,  $dx = \frac{dx}{\omega}$

$$\begin{aligned} \text{Sí } t_0 &= 0 \quad , \quad t = T \\ x_0 &= \theta \quad , \quad x_0 = \omega T + \theta = 2\pi + \theta \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} V_{rms} &= V_m \left[ \frac{1}{T} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \sin^2(x) \frac{dx}{\omega} \right]^{\frac{1}{2}} = V_m \left[ \frac{1}{\omega T} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \sin^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ V_{rms} &= V_m \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \sin^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Recordando que:  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  y resolviendo la integral se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \sin^2(x) dx &= \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \frac{1}{2} dx - \int_{\theta}^{2\pi+\theta} \frac{\cos(2x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi - \frac{1}{4} \sin(2x) \Big|_{\theta}^{2\pi+\theta} = \pi - \frac{1}{4} [\sin(4\pi + 2\theta) - \sin(2\theta)] = \pi \end{aligned}$$

Llegando a que:

$$V_{rms} = V_m \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \pi}$$

Finalmente:

$$\boxed{V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}} \quad \text{ó} \quad \boxed{V_m = \sqrt{2} V_{rms}}$$

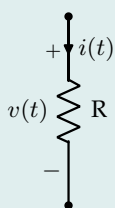
### 2.4.1. Valor promedio de una función periódica:

El valor promedio de una función periódica  $f(t)$  cada T segundos es:

$$F_{Promedio} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad (2.1)$$

con  $t_0$  un tiempo arbitrario.

#### Ejemplo 2.2: Aplicación del valor eficaz



La potencia instantánea que absorbe la resistencia es:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \text{ [W]}$$

suponiendo que  $p(t)$  es periódica cada T segundos.

Al utilizar la ecuación (2.4.1) para calcular la potencia promedio que absorbe la resistencia se tiene:

$$P_{Promedio} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) \cdot i(t) dt \quad (2.2)$$

Se sabe que en una resistencia  $v(t) = R \cdot i(t)$ , entonces:

Reemplazando  $i(t) = \frac{v(t)}{R}$  en (2.4.1) se tiene:

$$P_{Promedio} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt \right] = \frac{1}{R} V_{rms}^2$$

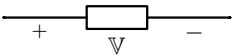
Reemplazando  $v(t) = R \cdot i(t)$  en (2.4.1) se tiene:

$$P_{Promedio} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} R \cdot i^2(t) dt = R \left[ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt \right] = R \cdot I_{rms}^2$$

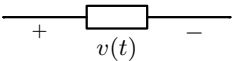
En la siguiente tabla se observa el uso de valores pico y valores rms para diferentes cantidades:

Cantidad	Usando valores pico	Usando valores rms
$v(t)$	$V_m \cos(\omega t + \theta_v)$	$\sqrt{2} V_{rms} \cos(\omega t + \theta_v)$
$i(t)$	$I_m \cos(\omega t + \theta_i)$	$\sqrt{2} I_m \cos(\omega t + \theta_i)$
P	$\frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$	$V_{rms} I_{rms} \cos(\theta_v - \theta_i)$
Q	$\frac{1}{2} V_m I_m \sin(\theta_v - \theta_i)$	$V_{rms} I_{rms} \sin(\theta_v - \theta_i)$
S	$\frac{1}{2} V_m I_m$	$V_{rms} I_{rms}$

**Nota:** De ahora en adelante (a menos que se especifique lo contrario) las magnitudes de los fasores serán los valores rms de los voltajes o corrientes en el tiempo así:



En el dominio de la frecuencia  $V = 7 \angle 30^\circ \text{ V}$



En el dominio del tiempo  $v(t) = \sqrt{2} \cdot 7 \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$

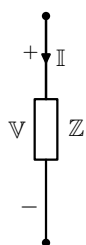
### 2.4.2. Regulación de voltaje

Es un factor que indica como es la variación del voltaje en una línea o en un dispositivo comparando el funcionamiento sin carga o vacío, frente al funcionamiento a plena carga.

$$RV(\%) = \frac{|V_{Entrada}| - |V_{salida}|}{|V_{salida}|} \cdot 100\%$$

El voltaje de salida se mide en los terminales de la carga. Por lo regular las normas exigen que la regulación de voltaje no debe superar el 5 %.

## 2.5. Potencia compleja



Sea  $\mathbb{V} = V \angle \theta_v$  e  $\mathbb{I} = I \angle \theta_i$

Se define la potencia compleja  $\mathbb{S}$  como:

$$\mathbb{S} = \mathbb{V} \cdot \mathbb{I}^*$$

Se tiene que:

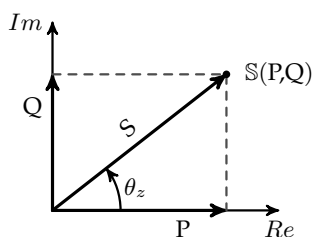
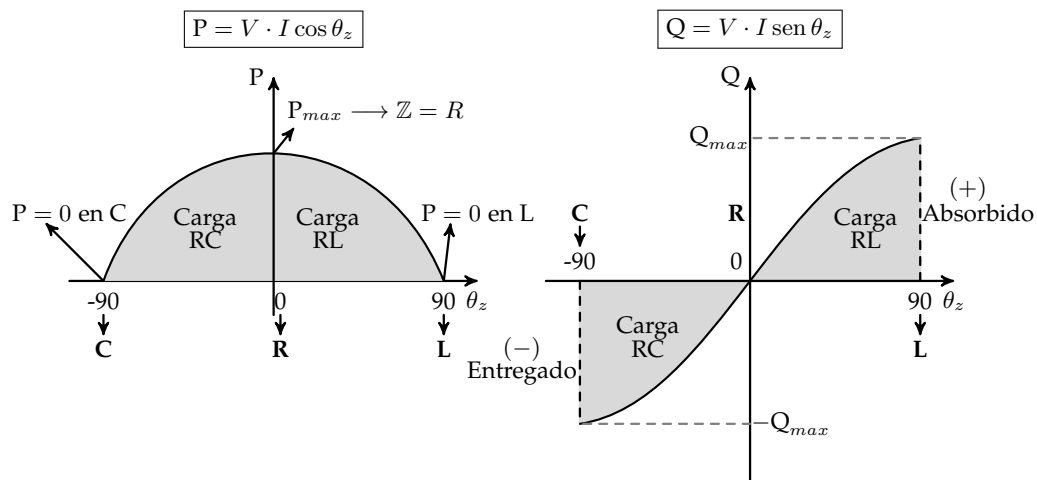
$$\mathbb{S} = (V \angle \theta_v)(I \angle -\theta_i) = V \cdot I \angle \theta_v - \theta_i$$

$$\mathbb{S} = V \cdot I \cos(\theta_v - \theta_i) + j V \cdot I \sin(\theta_v - \theta_i) = V \cdot I \cos \theta_z + j V \cdot I \sin \theta_z$$

Obteniendo que:

$$\text{Re}\{\mathbb{S}\} = P \quad ; \quad \text{Im}\{\mathbb{S}\} = Q \quad ; \quad |\mathbb{S}| = S$$

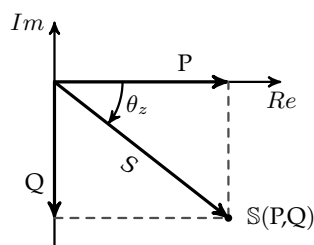
Sea  $\mathbb{Z} = Z \angle \theta_z$  una combinación de cargas lineales, donde  $-90^\circ \leq \theta_z \leq 90^\circ$ , al graficar la potencia compleja se tiene:



$$\theta_z > 0^\circ$$

Naturaleza de la carga: RL

El FP está en atraso  $\boxed{\text{FP} \downarrow}$



$$\theta_z < 0^\circ$$

Naturaleza de la carga: RC

El FP está en adelanto  $\boxed{\text{FP} \uparrow}$

El máximo valor del FP es 1 ( $\theta_z = 0$ ), para corregir el factor de potencia FP de una carga (hacerlo cercano al valor máximo 1) el ángulo de la impedancia debe ser cercano a cero ( $\theta_z \cong 0$ ).

### 2.5.1. Algunas expresiones útiles de la potencia compleja

Teniendo que:  $S = V \cdot I^*$  y  $Z = \frac{V}{I}$

Se puede obtener que:

Al reemplazar  $V = Z \cdot I$  se tiene:  $S = Z \cdot I \cdot I^* \Rightarrow \boxed{S = Z \cdot I^2}$

Al reemplazar  $I = \frac{V}{Z}$  se tiene:  $S = V \cdot \left(\frac{V}{Z}\right)^* \Rightarrow \boxed{S = \frac{V^2}{Z^*}}$

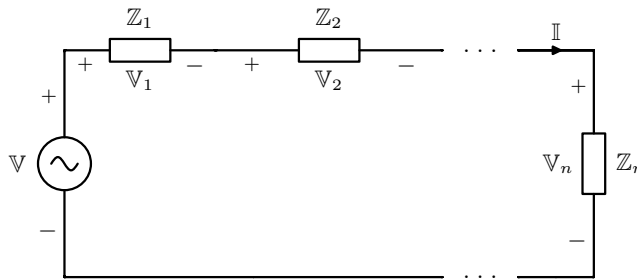
Sabiendo que:  $\boxed{S = P + jQ}$  se llega a:  $\boxed{S = S \angle \theta_z = \sqrt{P^2 + Q^2} \angle \tan^{-1} \left(\frac{Q}{P}\right)}$

### 2.5.2. Conservación de la potencia compleja

El principio de conservación de potencia compleja indica que la potencia compleja suministrada por la fuente o fuentes, es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas[2].

#### Dipolos en serie

Suponiendo n-dipolos conectados en serie:



Del circuito se puede llegar a:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \dots + V_n \\ V \cdot I^* &= (V_1 + V_2 + \dots + V_n) I^* \\ V \cdot I^* &= V_1 \cdot I^* + V_2 \cdot I^* + \dots + V_n \cdot I^* \end{aligned}$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n \Rightarrow S_g = \sum_{i=1}^n S_i \quad \text{Conservación de la potencia compleja}$$

Si  $S_g = P_g + jQ_g$  donde  $P_g$  : Potencia activa de la fuente  
 $Q_g$  : Potencia reactiva de la fuente

Y  $S_i = P_i + jQ_i$  donde  $P_i$  : Potencia activa del i-esimo dipolo  
 $Q_i$  : Potencia reactiva del i-esimo dipolo

Luego:

$$S_g = P_g + jQ_g = \sum_{i=1}^n S_i = \sum_{i=1}^n \{P_i + jQ_i\} = \sum_{i=1}^n P_i + j \sum_{i=1}^n Q_i$$

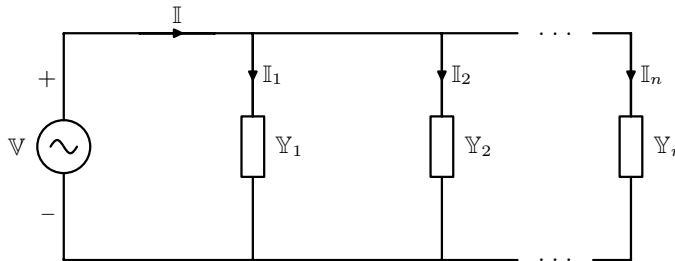
De lo anterior:

$$P_g = \sum_{i=1}^n P_i \Rightarrow \text{Conservación de potencia activa}$$

$$Q_g = \sum_{i=1}^n Q_i \Rightarrow \text{Conservación de potencia reactiva}$$

### Dipolos en paralelo

Suponiendo n-dipolos conectados en paralelo:



Del circuito se puede llegar a:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n \\ V \cdot I^* &= V (I_1 + I_2 + \dots + I_n)^* \\ V \cdot I^* &= V \cdot I_1^* + V \cdot I_2^* + \dots + V \cdot I_n^* \end{aligned}$$

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n \Rightarrow S_g = \sum_{i=1}^n S_i \quad \text{Conservación de la potencia compleja}$$

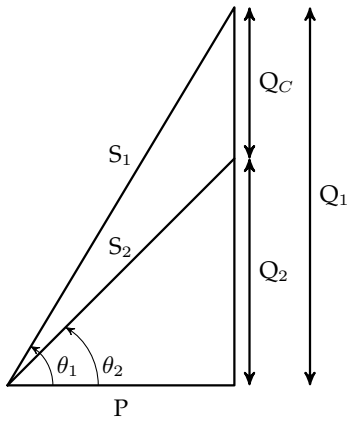
Cumpléndose lo mismo que en los dipolos serie.

**Nota:** La potencia activa (P) y reactiva (Q) se conservan, pero la potencia aparente (S) no se conserva.



## 2.6. Corrección del factor de potencia

La naturaleza de los inductores es consumir potencia reactiva y la de los condensadores es la de aportar potencia reactiva, estos principios permiten la corrección del factor de potencia de un circuito poniendo un condensador o inductor a la entrada del circuito. En una carga el factor de potencia ideal es cuando el  $FP$  es cercano a 1; cuando la carga posee elementos inductivos y capacitivos muchas veces este valor tiende a alejarse del  $FP$  ideal, esto puede arreglarse inyectando reactivos al circuito.



Considerando el triángulo de potencia de la figura. Si la carga inductiva original tiene la potencia aparente  $S_1$ , entonces:

$$P = S_1 \cos \theta_1 \quad , \quad Q = S_1 \sin \theta_1 = P \tan \theta_1$$

Si se desea incrementar el factor de potencia de  $\cos \theta_1$  a  $\cos \theta_2$  sin alterar la potencia real (es decir,  $P = S_2 \cos \theta_2$ ), la nueva potencia reactiva es:

$$Q_2 = P \tan \theta_2$$

La reducción de la potencia reactiva es causada por el capacitor en derivación; es decir:

$$Q_C = Q_1 - Q_2 = P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)$$

Sabiendo que:  $Q_C = \frac{V_{rms}^2}{X_C} = \omega C \cdot V_{rms}^2$

El valor de la capacitancia en paralelo requerida se determina como:

$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{rms}^2} = \frac{P(\tan \theta_1 - \tan \theta_2)}{\omega V_{rms}^2}$$

Adviértase que la potencia real  $P$  disipada por la carga no se ve afectada por la corrección del factor de potencia, porque la potencia promedio debida a la capacitancia es de cero.

Aunque la situación más común en la práctica es la de una carga inductiva, también es posible que la carga sea capacitiva; es decir, que opere con factor de potencia adelantado. En este caso, debe conectarse un inductor en la carga para la corrección del factor de potencia. La inductancia en paralelo  $L$  requerida puede calcularse a partir de:

$$Q_L = \frac{V_{rms}^2}{X_L} = \frac{V_{rms}^2}{\omega L} \implies L = \frac{V_{rms}^2}{\omega Q_L}$$

Donde  $Q_L = Q_1 - Q_2$ , la diferencia entre la nueva y la antigua potencias reactivas [3].

## 2.7. Ejemplos

**Ejemplo 2.3:** Para el circuito de la figura hallar los valores de  $R$ ,  $X$ ,  $V_0$  y la regulación de voltaje  $RV(\%)$  en la resistencia  $R$  con:

- sw cerrado.
- sw abierto.

**Solución:**

**a) Con sw cerrado**

Siendo  $I_R = (50 \angle \theta_{I_R}) \text{ A}$  e  $I_X = (80 \angle \theta_{I_X}) \text{ A}$

Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo (a) se tiene:

$$I_g = I_R + I_X = (50 \angle \theta_{I_R}) \text{ A} + (80 \angle \theta_{I_X}) \text{ A}$$

Si  $V_0$  es de la forma:  $V_0 = V_0 \angle \theta_{v_0} \Rightarrow \theta_{I_R} = \theta_{v_0}$  y  $\theta_{I_X} = \theta_{v_0} + 90^\circ$

Suponiendo que:  $\theta_{v_0} = 0^\circ \Rightarrow \theta_{I_R} = 0^\circ$  y  $\theta_{I_X} = 90^\circ$

Tomando a  $\theta_{v_0}$  como fasor de referencia.

Ahora bien calculando  $I_g$  se tiene:  $I_g = (50 \angle 0^\circ) + (80 \angle 90^\circ) \text{ A}$

$$I_g = 94,33 \angle 57,99^\circ \text{ A} \quad \text{Nótese que: } |I_g| \neq 50 \text{ A} + 80 \text{ A}$$

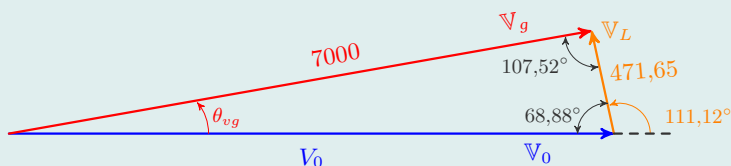
Calculando  $V_L$ :  $V_L = (3 + j4)I_g = (3 + j4)(94,33 \angle 57,90^\circ) \text{ V}$

$$V_L = 471,65 \angle 111,12^\circ \text{ V}$$

$$\sum V_{m1} = 0 \Rightarrow V_g = V_L + V_0$$

$$7000 \angle \theta_{vg} = (471,65 \angle 111,12^\circ) + (V_0 \angle \theta_0)$$

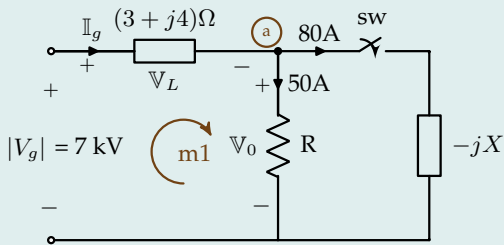
La ecuación obtenida se puede resolver usando un diagrama fasorial:



Del diagrama se llega a:

$$\frac{\sin \theta_{vg}}{471,65 \text{ V}} = \frac{\sin 68,88^\circ}{7000 \text{ V}} \Rightarrow \boxed{\theta_{vg} = 3,6^\circ}$$

$$\frac{V_0}{\sin 107,52^\circ} = \frac{7000 \text{ V}}{\sin 68,88^\circ} \Rightarrow \boxed{V_0 = 7155,96 \text{ V}}$$



Calculando los valores de R y X:

$$R = \frac{V_0}{I_R} = \frac{7155,96 \text{ V}}{50 \text{ A}} \Rightarrow \boxed{R = 143,11 \Omega}$$

$$X = \frac{V_0}{I_X} = \frac{7155,96 \text{ V}}{80 \text{ A}} \Rightarrow \boxed{X = 89,44 \Omega}$$

Calculando la regulación de voltaje entre  $V_g$  y  $V_0$  se tiene:

$$RV(\%) = \frac{7000 \text{ V} - 7155,96 \text{ V}}{7155,96 \text{ V}} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{RV = -2,17\%}$$

### b) Con sw abierto:

Cabe notar que al abrir sw los valores de  $V_0, V_g, V_L, I_g, I_R$  cambian. Para llegar al resultado deseado se puede hacer de dos formas:

\* Primera forma:

Suponiendo que:  $V_0 = V_0 \angle 0^\circ$  e  $I_g = I_g \angle 0^\circ$

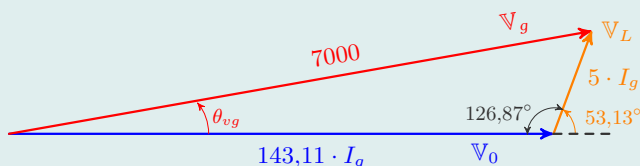
Para  $V_L$ :  $V_L = (3 + j4) \Omega \cdot I_g = (5 \angle 53,13^\circ) \Omega (I_g \angle 0^\circ) \text{ A} = 5 \cdot I_g \angle 53,13^\circ \text{ V}$

Para  $V_0$ :  $V_0 = R \cdot I_g = 143,11 \cdot I_g \angle 0^\circ \text{ V}$

De  $V_g = V_0 + V_L$  se obtiene:

$$7000 \angle \theta_{vg} \text{ V} = (143,11 \cdot I_g \angle 0^\circ) \text{ V} + (5 \cdot I_g \angle 53,13^\circ) \text{ V}$$

Representado en un diagrama fasorial:



Del diagrama fasorial y aplicando la ley del coseno se tiene:

$$7000^2 = (143,11 \cdot I_g)^2 + (5 \cdot I_g)^2 - 2(143,11 \cdot I_g)(5 \cdot I_g) \cos 126,87^\circ$$

$$7000^2 = 20505,47 \cdot I_g^2 + 858,26 \cdot I_g^2 = 21363,73 \cdot I_g^2$$

Obteniendo que:  $I_g = 47,89 \text{ A}$  además:  $V_0 = 6853,54 \text{ V}$  y  $V_L = 239,45 \text{ V}$

Hallando la regulación de voltaje cuando sw esta abierto se tiene:

$$RV(\%) = \frac{7000 \text{ V} - 6853,54 \text{ V}}{6853,54 \text{ V}} \cdot 100\% \Rightarrow \boxed{RV = 2,13\%}$$

\* Segunda forma:

Se utiliza un divisor de tensión para determinar la magnitud de  $V_0$ :

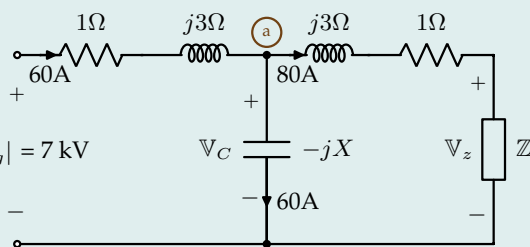
$$|V_0| = \frac{143,11 \Omega}{146,16 \Omega} \cdot 7000 \text{ V} \implies |V_0| = 6853,7 \text{ V}$$

Donde  $146,6 \Omega$  es la magnitud de:  $143,11 \Omega + (3 + j4)\Omega$ .

### Ejemplo 2.4:

Para el circuito de la figura hallar:

- Los valores de:  $X$  y  $Z$
- La regulación de voltaje  $\%RV$  en  $Z$   $|V_g| = 7 \text{ kV}$
- El valor del condensador o inductor en paralelo con la fuente para que el factor de potencia en el generador sea  $FP_g = 0,9 \downarrow$



### Solución:

a) Se definen las corrientes que llegan al nodo (a) como:

$$I_g = 60 \angle \theta_{I_g}, \quad I_X = 60 \angle \theta_{I_X} \quad e \quad I_Z = 60 \angle \theta_{I_Z}$$

Al hacer sumatoria de corrientes se tiene:

$$I_g = I_X + I_Z \implies 60 \angle \theta_{I_g} = (60 \angle \theta_{I_X}) + (80 \angle \theta_{I_Z})$$

Al suponer  $\theta_{I_g} = 0^\circ$  como referencia se llega a:

$$60 \angle 0^\circ = (60 \angle \theta_{I_X}) + (80 \angle \theta_{I_Z})$$

Al representar la ecuación se obtienen dos diagramas fasoriales. Aplicando la ley de cosenos en el diagrama ABC se tiene:

$$80^2 = 60^2 + 60^2 - 2 \cdot 60^2 \cos \theta_{I_X}$$

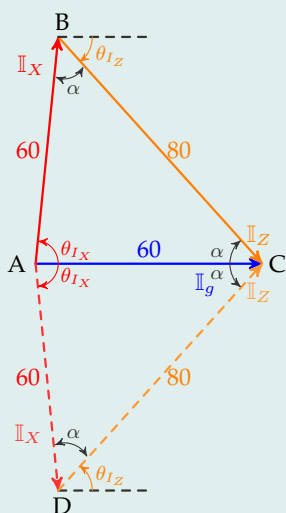
Obteniendo que:  $\theta_{I_X} = 83,62^\circ$

Ahora aplicando la ley del seno:

$$\frac{\sin \alpha}{60^\circ} = \frac{\sin \theta_{I_X}}{80} \implies \alpha = 48,19^\circ$$

Para hallar  $\theta_{I_Z}$  se analiza el diagrama y se llega a que:

$$\theta_{I_Z} + 2\alpha = 180^\circ \implies \theta_{I_Z} = -48,19^\circ$$



De lo anterior se llega a:

Del diagrama ABC:  $\mathbb{I}_X = 60\angle 83,62^\circ \text{ A}$  e  $\mathbb{I}_Z = 80\angle -48,19^\circ \text{ A}$

Del diagrama ADC:  $\mathbb{I}_X = 60\angle -83,62^\circ \text{ A}$  e  $\mathbb{I}_Z = 80\angle 48,19^\circ \text{ A}$

Teniendo que:  $\mathbb{V}_C = -jX \cdot \mathbb{I}_X$

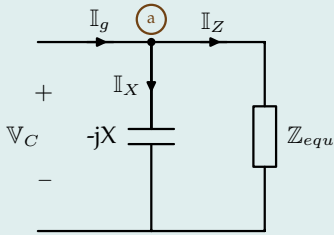
Reescribiendo:

$$\mathbb{V}_C = (X\angle -90^\circ)(I_X\angle \theta_{I_X}) = X \cdot I_X\angle \theta_{I_X} - 90^\circ$$

De  $\mathbb{I}_X = 60\angle -83,62^\circ \text{ A} \Rightarrow \mathbb{V}_C = 60 \cdot X\angle -6,38^\circ \text{ V}$

De  $\mathbb{I}_X = 60\angle 83,62^\circ \text{ A} \Rightarrow \mathbb{V}_C = 60 \cdot X\angle -137,62^\circ \text{ V}$

Del circuito se tiene que:



$$\mathbb{Z}_{equ} = (j3 + 1 + \mathbb{Z}) \Omega$$

Se sabe que las cargas  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Z}_{equ}$  tienen un ángulo que se encuentra entre  $-90^\circ$  y  $90^\circ$

Por definición:  $\mathbb{Z}_{equ} = \frac{\mathbb{V}_C}{\mathbb{I}_Z}$

Al utilizar los valores obtenidos del diagrama ABC se tiene que:

$$\mathbb{Z}_{equ1} = \frac{60 \cdot X\angle -6,38^\circ \text{ V}}{80\angle -48,19^\circ \text{ A}} = 0,75 \cdot X\angle 41,81^\circ \Omega$$

Al utilizar los valores obtenidos del diagrama ADC se tiene que:

$$\mathbb{Z}_{equ2} = \frac{60 \cdot X\angle -173,62^\circ \text{ V}}{80\angle 48,19^\circ \text{ A}} = 0,75 \cdot X\angle -221,81^\circ \Omega$$

De lo anterior se puede descartar el valor de  $\mathbb{Z}_{equ2}$  ya que su ángulo se encuentra fuera del ángulo de carga  $-90^\circ \leq \theta_{Z_{equ}} \leq 90^\circ$  obteniendo que:

$$\mathbb{I}_Z = 80\angle -48,19^\circ \text{ A} \quad y \quad \mathbb{V}_C = 60 \cdot X\angle -6,38^\circ \text{ V}$$

Haciendo sumatoria de voltajes en la malla m1:

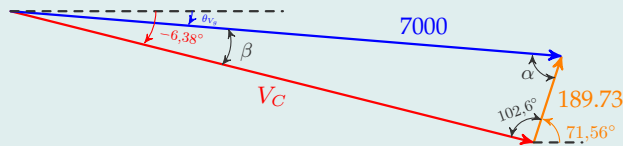
$$\sum \mathbb{V}_{m1} = 0 \Rightarrow \mathbb{V}_g = (1 + j3)\Omega \cdot \mathbb{I}_g + \mathbb{V}_C$$

Reemplazando:

$$7000\angle \theta_{V_g} = (1 + j3)\Omega(60\angle 0^\circ)\text{A} + V_C\angle -6,38^\circ \text{ V}$$

$$7000\angle \theta_{V_g} = 189,73\angle 71,56^\circ \text{ V} + V_C\angle -6,38^\circ \text{ V}$$

De la ecuación obtenida se puede hacer un diagrama fasorial



Del diagrama se llega a que:

$$\frac{\sin \beta}{189,73} = \frac{\sin 102,06^\circ}{7000} \implies \beta = 1,52^\circ$$

$$\frac{V_C}{\sin \alpha} = \frac{7000}{\sin 102,06^\circ} \implies V_C = 6957,87 \text{ V}$$

$$\alpha = 180 - 102,06^\circ - \beta \implies \alpha = 76,42^\circ$$

$$\theta_{V_g} = -6,38^\circ + \beta \implies \theta_{V_g} = -4,86^\circ$$

Hallando el valor de  $X$  se tiene que:  $X = \frac{6957,87 \text{ V}}{60 \text{ A}} \implies \boxed{X = 115,96 \Omega}$

De lo anterior se obtiene:

$$\mathbb{V}_C = 6957,87 \angle -6,38^\circ \text{ V} \quad e \quad \mathbb{I}_Z = 80 \angle -48,19^\circ \text{ A}$$

Calculando el valor de  $\mathbb{Z}_{equ}$ :

$$\mathbb{Z}_{equ} = \frac{\mathbb{V}_C}{\mathbb{I}_Z} = \frac{6957,87 \angle -6,38^\circ \text{ V}}{80 \angle -48,19^\circ \text{ A}} = 86,97 \angle 41,81^\circ \Omega$$

Obteniendo el valor de  $\mathbb{Z}$ :

$$j3 + 1 + \mathbb{Z} = 86,97 \angle 41,81^\circ \Omega \implies \boxed{\mathbb{Z} = 84,23 \angle 40,73^\circ \Omega}$$

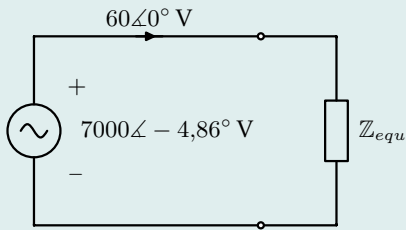
**b) Hallando  $\mathbb{V}_Z$ :**

$$\mathbb{V}_Z = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{I}_Z = (84,23 \angle 40,73^\circ \Omega)(80 \angle -48,19^\circ \text{ A}) \implies \mathbb{V}_Z = 6738,4 \angle -7,46^\circ \text{ V}$$

Hallando la regulación de voltaje:

$$RV(\%) = \frac{6957,87 \text{ V} - 6738,4 \text{ V}}{6738,4 \text{ V}} \cdot 100\% \implies \boxed{RV(\%) = 3,25\%}$$

**c) Representando el circuito del ejercicio en un circuito equivalente se tiene:**



$$Z_{equ} = \frac{7000 \angle -4,86^\circ \text{ V}}{60 \angle 0^\circ \text{ A}} = 116,6 \angle -4,86^\circ \Omega$$

Como:

$$FP_g = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos \theta_Z \implies FP_g = 0,99 \uparrow$$

Se requiere cambiar este factor de potencia a uno nuevo:  $FP_{new} = 0,9 \downarrow$

Se conectará un elemento en paralelo con la fuente para la corrección del factor de potencia como se ve en la figura.

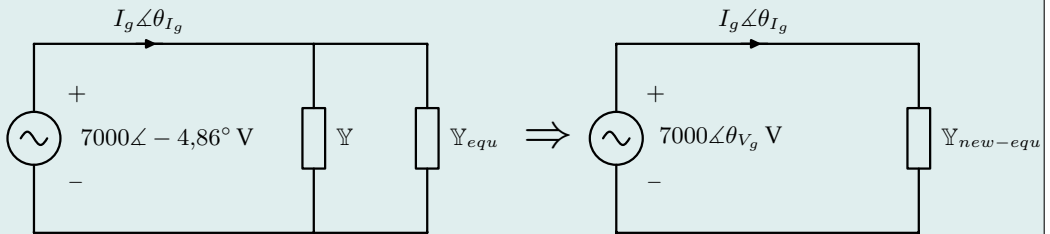


Figura 2.1. Corrigiendo el factor de potencia

Como se quiere obtener un  $FP$  de  $0,9 \downarrow$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{V_g} - \theta_{I_g}) &= 0,9 \implies \theta_{V_g} > \theta_{I_g} \\ \cos \theta_{new} &= 0,9 \implies \boxed{\theta_{new} = 25,84^\circ} \end{aligned}$$

Del circuito de la figura (2.1) se tiene:

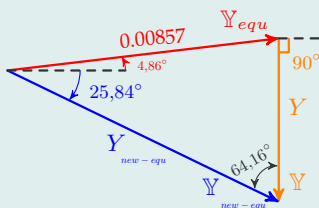
$$Y_{equ} = \frac{1}{Z_{equ}} = \frac{1}{116,6 \angle -4,86^\circ \Omega} = 0,00857 \angle 4,86^\circ \text{ U}$$

En general:  $Y = G + jB$

Como  $Y$  es un inductor o un capacitor entonces:  $Re\{Y\} = 0$

$$\begin{aligned} Y_{new-equ} &= Y + Y_{equ} \\ Y_{new-equ} \angle -25,84^\circ \text{ U} &= Y + 0,00857 \angle 4,86^\circ \text{ U} \end{aligned}$$

Haciendo de nuevo un diagrama fasorial:



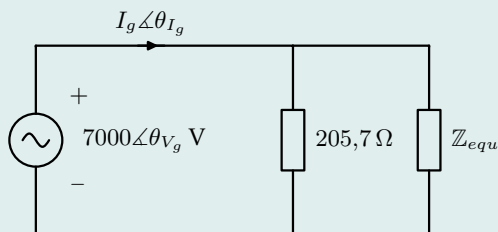
La característica de  $Y$  es la de una inductancia.

Del diagrama fasorial se obtiene:

$$\frac{0,00857 \text{ U}}{\sin 64,16^\circ} = \frac{Y}{\sin(4,86^\circ + 25,84^\circ)}$$

Obteniendo que:

$$Y = B_L = 0,00486 \text{ S} \quad \Rightarrow \quad X_L = \frac{1}{B_L} = 205,7 \Omega$$



Suponiendo que la frecuencia de la fuente sea  $f = 60 \text{ Hz}$  se tiene:

$$L = \frac{205,7 \Omega}{2\pi \cdot 60 \text{ Hz}} = 0,55 \text{ H}$$

Para el circuito de la izquierda donde  $Z_{equ} = 116,6 \angle -4,86^\circ \Omega$ ; el factor de potencia viene dado por:

$$FP_g = \cos(\theta_{new-equ}) = \cos 25,84^\circ \quad \Rightarrow \quad FP_g = 0,9 \downarrow$$

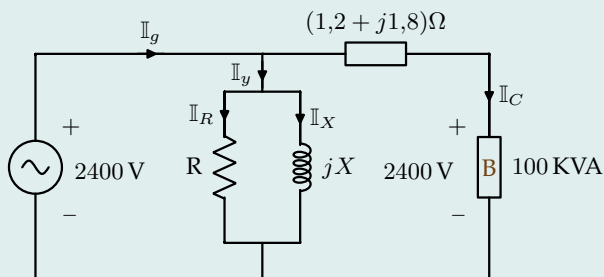
Ya que:  $\theta_{new-equ} > 0^\circ$

**Ejemplo 2.5:** Para el circuito de la figura se tiene que:

$$I_X = 12 \text{ A} \quad e \quad I_y = 15 \text{ A}$$

Encontrar:

- El valor de R y de X.
- El FP de la carga.
- El FP de la fuente.



**Solución:**

a) Se sabe que:  $I_y = I_X + I_R \Leftrightarrow 15 \angle \theta_{I_y} = 12 \angle \theta_{I_X} + I_R \angle \theta_{I_R}$

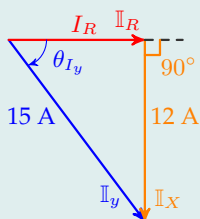
Se toma el voltaje de la fuente como referencia:  $V_g = 2400 \angle 0^\circ \text{ V}$

Teniendo que:  $\theta_{I_R} = 0^\circ$  y  $\theta_{I_X} = 90^\circ$

Obteniendo la ecuación:

$$15 \angle \theta_{I_y} = 12 \angle 90^\circ + I_R \angle 0^\circ$$

Del diagrama fasorial se obtiene:



$$I_R = \sqrt{(15 \text{ A})^2 - (12 \text{ A})^2} \quad \Rightarrow \quad I_R = 9 \text{ A}$$

$$\theta_{I_g} = -\tan^{-1} \left( \frac{12 \text{ A}}{9 \text{ A}} \right) \quad \Rightarrow \quad \theta_{I_g} = -53,13^\circ$$



Hallando  $R$  y  $X$ :

$$R = \frac{2400 \text{ V}}{9 \text{ A}} \Rightarrow \boxed{R = 266,6 \Omega}$$

$$X = \frac{2400 \text{ V}}{12 \text{ A}} \Rightarrow \boxed{X = 200 \Omega}$$

b) Con los datos de la carga B se halla el valor de  $I_C$ :

$$I_C = \frac{S_B}{V_B} = \frac{100 \text{ KVA}}{2400 \text{ V}} \Rightarrow I_C = 41,66 \text{ A}$$

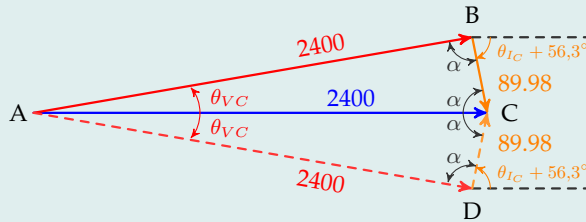
Al aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff en la malla del circuito donde se encuentra la carga se tiene:

$$2400 \angle 0^\circ = (1,2 + j1,8) \cdot I_C + 2400 \angle \theta_{VC}$$

$$2400 \angle 0^\circ = (2,16 \angle 56,3^\circ)(41,66 \angle \theta_{IC}) + 2400 \angle \theta_{VC}$$

$$2400 \angle 0^\circ = [89,98 \angle (\theta_{IC} + 56,3^\circ)] + 2400 \angle \theta_{VC}$$

De lo anterior se llega al siguiente diagrama fasorial:



Se obtienen dos diagramas fasoriales a analizar. Aplicando la ley del coseno en el diagrama ABC:

$$89,98^2 = 2400^2 + 2400^2 - 2 \cdot 2400^2 \cdot \cos \theta_{VC}$$

$$89,98^2 = 2 \cot 2400^2 (1 - \cos \theta_{VC}) \Rightarrow \frac{89,98^2}{2 \cdot 2400^2} = 1 - \cos \theta_{VC}$$

$$\theta_{VC} = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{89,98^2}{2 \cdot 2400^2} \right) = 2,14^\circ \quad (\text{Para el diagrama ABC})$$

$$\text{Hallando } \alpha: \quad 2\alpha + \theta_{VC} = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 88,93^\circ$$

Del diagrama ABC:

$$[89,98 \angle -(\theta_{IC} + 56,3^\circ)] = 2400 \angle 2,14^\circ - 2400 \angle 0^\circ \Rightarrow \theta_{IC} = -147,37^\circ$$

Del diagrama ADC:

$$[89,98 \angle (\theta_{IC} + 56,3^\circ)] = 2400 \angle 0^\circ - 2400 \angle -2,14^\circ \Rightarrow \theta_{IC} = 32,63^\circ$$

Sabiendo que:  $-90^\circ \leq \theta_Z \leq 90^\circ$  y que:  $\theta_Z = \theta_{V_C} - \theta_{I_C}$

Escogiendo el diagrama fasorial correcto:

Del diagrama ABC:  $\theta_Z = 2,14^\circ - (-147,37^\circ) = 149,51^\circ$

Del diagrama ADC:  $\theta_Z = -2,14^\circ - 32,63^\circ = -34,77^\circ$

De lo anterior se escoge los valores obtenidos del diagrama fasorial ADC ya que  $\theta_Z$  cumple con la condición de carga.

Hallando el factor de potencia de la carga B:

$$FP_{carga} = \cos -34,77^\circ \implies \boxed{FP_{carga} = 0,82 \uparrow}$$

c) Teniendo que:  $I_g = I_y + I_C$

Se obtiene:

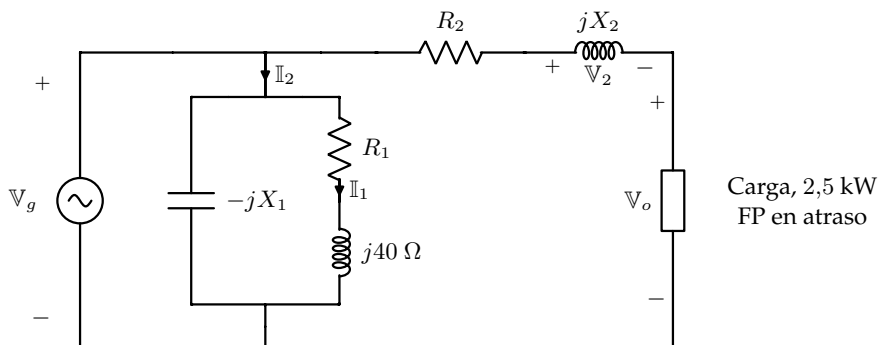
$$I_g = 15 \angle -53,13^\circ \text{ A} + 41,66 \angle 32,63^\circ \text{ A}$$

$$I_g = 45,3 \angle 13,35^\circ \text{ A}$$

$$\text{Ahora bien: } FP_g = \cos(0 - 13,35) \implies \boxed{FP_g = 0,97 \uparrow}$$

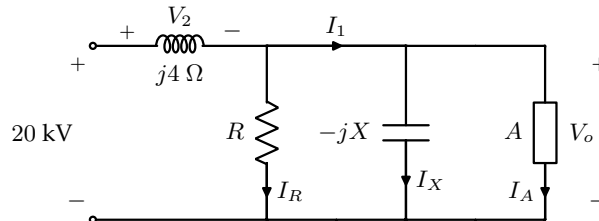
## 2.8. Ejercicios propuestos

1.  $V_g = 120 \text{ V}$ ,  $V_2 = 5 \text{ V}$ ,  $I_1 = 2,4 \text{ A}$ ,  $I_2 = 4,3 \text{ A}$ . El generador suministra 2943 VA a un FP de 0,93 en atraso. Con la ayuda del diagrama fasorial hallar: a)  $X_1$  y  $R_1$ , b)  $X_2$  y  $R_2$ , c)  $V_o$ , d) FP de la carga.



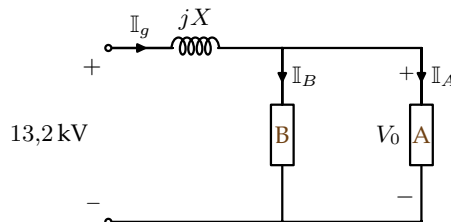
Respuesta:  $X_1 = 20,1 \Omega$ ;  $R_1 = 30 \Omega$ ;  $X_2 = 0,199 \Omega$ ;  $R_2 = 0,1027 \Omega$   
 $V_o = 115,2 \angle 51,7^\circ \text{ V}$ ;  $FP_o = 0,861 \downarrow$

2. En el circuito de la figura,  $A$  es una carga de  $FP = 0,866$  en atraso,  $I_1 = 300$  A, el generador suministra 8 MW y recibe 1 MVar. Encontrar:  $V_o$ , potencia compleja de  $R$ , potencia compleja del condensador, potencia media de  $A$ .



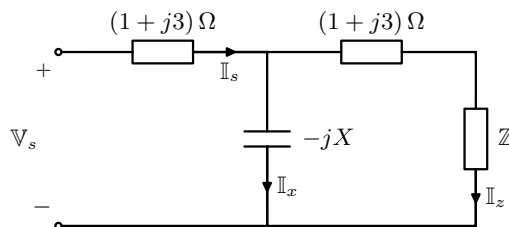
Respuesta:  $V_o = 20263 \angle -11,65^\circ$  V;  $S_R = 13,86 \times 10^6$  W  
 $S_X = 6,2 \times 10^6 \angle -90^\circ$  VA;  $P_A = 2,474 \times 10^6$  W

3. En el circuito de la figura, la fuente entrega una potencia compleja de  $S_g = (8 + j4)$  MVA; para las cargas se tienen los siguientes datos:  
 Carga A:  $Q=3$  MVar y  $S=5$  MVA; Carga B:  $FP=0,707 \uparrow$ ; Hallar:  
 a)  $V_o$  y  $X$ . b) La regulación de voltaje en la carga A ( $RV\%$ ).  
 c) Un condensador tal que al ser conectado en paralelo a la fuente el  $FP_g=1$



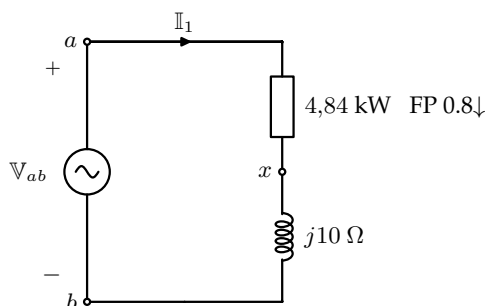
Respuesta: a)  $V_o = 11898,95 \angle -33,69^\circ$  V;  $X = 10,89 \Omega$ .  
 b)  $RV\% = 10,93\%$ . c)  $C = 60,89 \mu\text{F}$ .

4. En el circuito de la siguiente figura  $V_s = 7$  kV,  $I_s = 60$  A,  $I_x = 60$  A,  $I_z = 80$  A. Usando diagramas fasoriales, determine: a)  $X$ . b)  $Z$  (magnitud y ángulo).



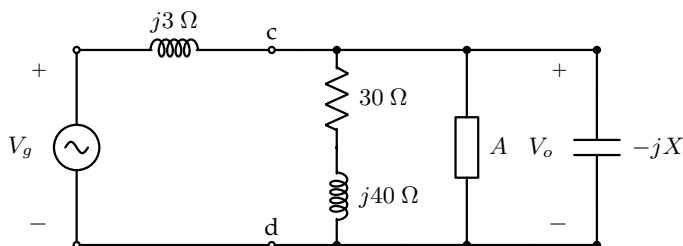
Respuesta: a)  $X = 113,1757 \Omega$ ; b)  $Z = 82,1514 \angle 40,71^\circ \Omega$

5. En el circuito de la figura,  $\mathbb{V}_{ab} = 440\angle 0^\circ$  V. Hallar la corriente  $\mathbb{I}_1$ .



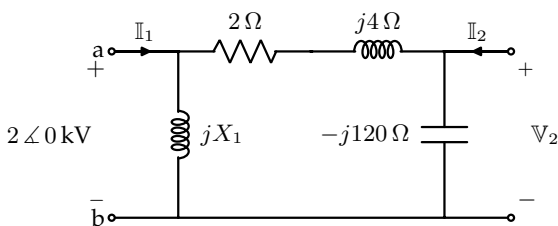
Respuesta:  $\mathbb{I}_1 = 24,6\angle -63,44^\circ$  A

6. El generador suministra 80 kW, el factor de potencia en los terminales c-d es 0,94 en adelante. La carga A es de factor de potencia de 0,866 en atraso. Si  $V_o = 2$  kV, encontrar:
- Potencia compleja de A.
  - Potencia compleja del condensador.
  - Factor de potencia del generador.
  - $V_g$  y  $X$



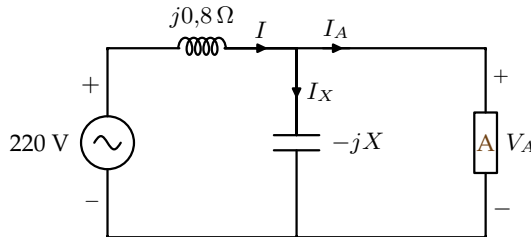
Respuesta: a)  $\mathbb{S}_A = (36,82\angle 30^\circ)$  KVA; b)  $\mathbb{S}_C = (111,4\angle -90^\circ)$  KVA  
c)  $FP_g = 0,9591 \uparrow$ ;  $V_g = 1960$  V; d)  $X = 35,9 \Omega$

7. En los terminales a-b del circuito de la figura, se reciben 100 kW y se entregan 20 kVar. Las pérdidas en la línea son 5408 W. Hallar:  $X_1$ ,  $\mathbb{V}_2$ ,  $\mathbb{I}_1$  e  $\mathbb{I}_2$ .



Respuesta:  $X_1 = 82,36 \Omega$ ;  $\mathbb{V}_2 = 2163,9\angle 4,54^\circ$  V;  $\mathbb{I}_1 = 51\angle 191,32^\circ$  A;  $\mathbb{I}_2 = 48,7\angle 4,34^\circ$  A.

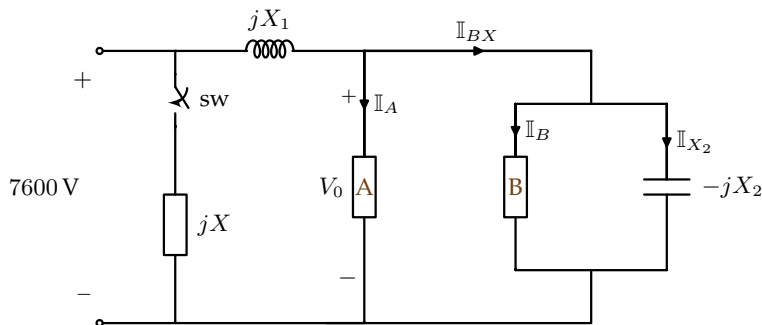
8. En el circuito de la figura,  $I = 40\text{A}$ ,  $I_A = 50\text{A}$ ,  $V_A = 210\text{V}$ . Usando diagrama fasorial, (referencia  $\mathbb{V}_A$ ). Calcular:  $P_X$ ,  $Q_X$ ,  $S_X$ ,  $\mathbb{S}_x$ ,  $P_A$ ,  $Q_A$ ,  $S_A$ ,  $\mathbb{S}_A$ . Además el  $FP$  de la carga A y el  $FP$  del generador.



Respuesta:  $P_X = 0$ ;  $Q_X = -2100 \text{ VA}_r$ ;  $S_X = 2100\text{VA}$ ;  $P_A = 8137,09 \text{ W}$   
 $Q_A = 6636,3 \text{ VA}_r$ ;  $S_A = 10500 \text{ VA}$   $FP_B = 0,77 \uparrow$ ;  $FP_g = 0,92 \uparrow$

9. El generador del circuito de la figura entrega una potencia aparente de 1320,7521 MVA y una potencia reactiva de  $-522,5693 \text{ kVAR}$ . Se tienen los datos de las corrientes:  $I_{X_2} = 113,4565 \text{ A}$  e  $I_{BX} = 197,1413 \text{ A}$ ; además de las cargas se tiene que:  
 Carga A:  $\mathbb{S}_A = S_A \angle 56,3099 \text{ VA}$ ; Carga B:  $FP_B = 0,8321 \uparrow$ ; Hallar:

- a)  $\mathbb{V}_0$  y  $RV \%$  en la carga A, cuando sw está abierto.  
 b) Los valores de  $X_1$ ;  $X_2$  y el inductor o capacitor conectado en paralelo a la fuente tal que  $FP_g = 0,95 \downarrow$  cuando sw está cerrado.



Respuesta: a)  $\mathbb{V}_0 = 7946,64 \angle 0 \text{ V}$ ;  $RV \% = -4,36 \%$ .  
 b)  $X_1 = 4,566 \Omega$ ;  $X_2 = 70,041 \Omega$ ;  $L = 166,316 \text{ mH}$ .



# 3

## Sistemas trifásicos

### 3.1. Sistemas polifásicos

Cuando una bobina se mueve dentro de un campo magnético, se genera una tensión alterna senoidal. La aparición de esta única onda alterna, hace que se denomine esta máquina: *generador monofásico*. Si el número de bobinas en el rotor se incrementa de una forma especial, el resultado es un *generador polifásico* que produce más de una onda alterna en cada revolución del rotor.

Los sistemas polifásicos fueron inventados por el ingeniero croata-americano Nikola Tesla en 1888, la base del mismo era el descubrimiento del motor asíncrono polifásico [2].

Los sistemas polifásicos se encuentran conformados por  $m$  fases de la misma naturaleza.

★ Conexión Y (con neutro)

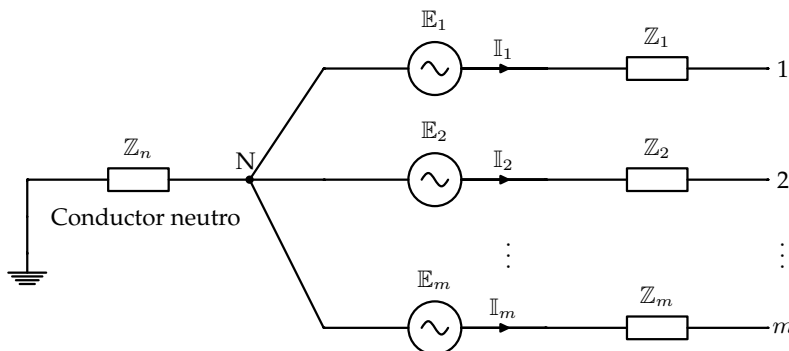


Figura 3.1. Sistemas polifásicos: Conexión en Y

$$|E_1| = |E_2| = \dots = |E_m| \quad ; \quad Z_1 = Z_2 = \dots = Z_m$$

$$|V_{1N}| = |V_{2N}| = \dots = |V_{mN}| \quad \text{Voltajes de fase}$$

Los voltajes se encuentran desfasados  $\frac{360^\circ}{m}$   $m \geq 3$

Los voltajes forman un polígono regular de  $m$  lados.

$$V_{1N} + V_{2N} + \dots + V_{mN} = 0$$

★ Conexión  $\Delta$  (sin neutro)

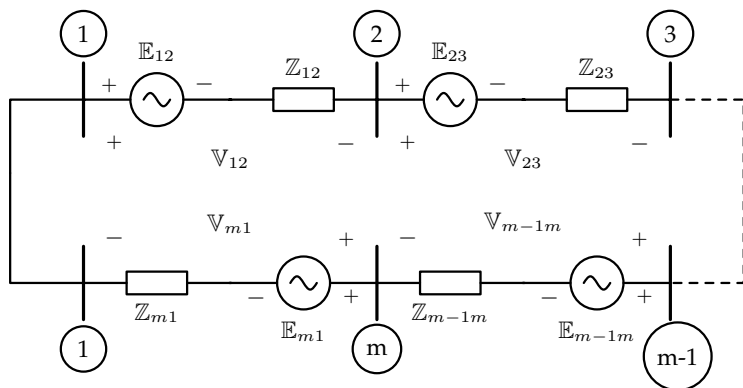


Figura 3.2. Sistemas polifásicos: Conexión en delta ( $\Delta$ )

$$|V_{12}| = |V_{23}| = \dots = |V_{m-1m}| = |V_{m1}|$$

Los voltajes se encuentran desfasados  $\frac{360^\circ}{m}$   $m \geq 3$

Los voltajes forman un polígono regular de  $m$  lados.

$$V_{12} + V_{23} + \dots + V_{m-1m} + V_{m1} = 0$$

★  $m = 2$  (Bifásico)

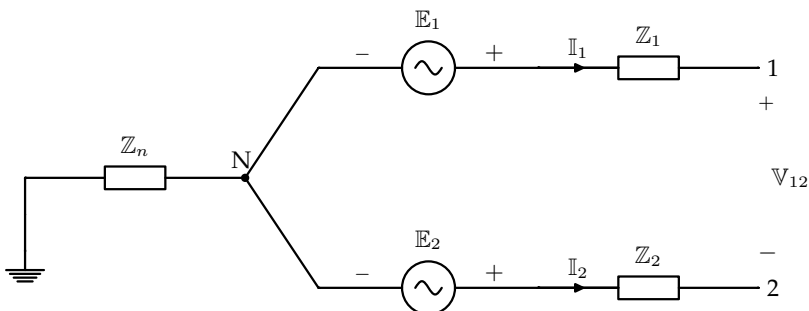
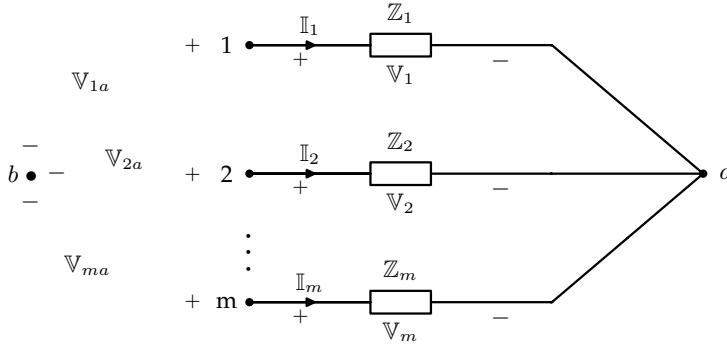


Figura 3.3. Sistema bifásico



$$\mathbb{V}_{12} = \mathbb{V}_{1N} - \mathbb{V}_{2N} = \sqrt{2} V_f \angle -45^\circ \text{ V} \quad \text{donde} \quad \begin{aligned} \mathbb{V}_{1N} &= V_f \angle 0^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{2N} &= V_f \angle 90^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

### 3.1.1. Teorema de Millman



**Figura 3.4.** Teorema de Millman

Con el teorema de Millman se determina en forma rápida la tensión que existe entre los nodos  $a$  y  $b$ , conociendo las impedancias que concurren en  $a$  y los voltajes entre el nodo  $b$  y los extremos de las impedancias.

Deducción:

1. Se aplica la ley de corrientes de Kirchhoff en el nodo  $a$ .

$$\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \cdots + \mathbb{I}_m = 0$$

2. Expresar las corrientes en términos de voltajes.

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{Z}_1} = \frac{\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{1b}}{\mathbb{Z}_1} = \mathbb{Y}_1(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{1b}) \\ \mathbb{I}_2 &= \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{Z}_2} = \frac{\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{2b}}{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{Y}_2(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{2b}) \\ &\vdots \\ \mathbb{I}_m &= \frac{\mathbb{V}_m}{\mathbb{Z}_m} = \frac{\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{mb}}{\mathbb{Z}_m} = \mathbb{Y}_m(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{mb}) \end{aligned}$$

3. Remplazando lo obtenido en el paso 2 en el paso 1.

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}_1(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{1b}) + \mathbb{Y}_2(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{2b}) + \cdots + \mathbb{Y}_m(\mathbb{V}_{ab} - \mathbb{V}_{mb}) &= 0 \\ \mathbb{Y}_1\mathbb{V}_{ab} + \mathbb{Y}_2\mathbb{V}_{ab} + \cdots + \mathbb{Y}_m\mathbb{V}_{ab} &= \mathbb{Y}_1\mathbb{V}_{1b} + \mathbb{Y}_2\mathbb{V}_{2b} + \cdots + \mathbb{Y}_m\mathbb{V}_{mb} \\ (\mathbb{Y}_1 + \mathbb{Y}_2 + \cdots + \mathbb{Y}_m)\mathbb{V}_{ab} &= \mathbb{Y}_1\mathbb{V}_{1b} + \mathbb{Y}_2\mathbb{V}_{2b} + \cdots + \mathbb{Y}_m\mathbb{V}_{mb} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^m Y_k V_{ab} = \sum_{k=1}^m Y_k V_{kb} \implies V_{ab} = \frac{\sum_{k=1}^m Y_k V_{kb}}{\sum_{k=1}^m Y_k}$$

### 3.1.2. Sistema monofásico trifilar

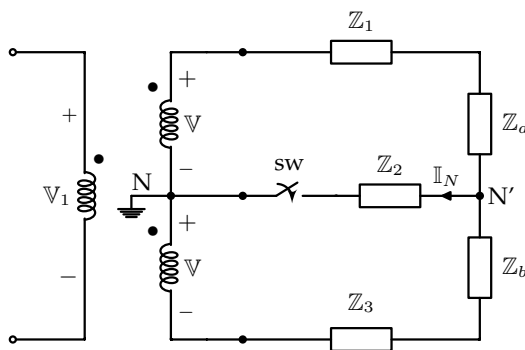


Figura 3.5. Sistema monofásico trifilar

Del la figura 3.5, N es el neutro de la fuente y N' es el neutro de la carga. La carga es equilibrada:

$$Z_a = Z_b \quad \text{y} \quad Z_1 = Z_3$$

- Con sw abierto ( $I_N = 0$ )

$$V_{N'N} = \frac{V \frac{1}{Z_1 + Z_a} + 0 + 0 - V \frac{1}{Z_3 + Z_b}}{\frac{1}{Z_1 + Z_a} + \cancel{\frac{1}{\infty}} + \frac{1}{Z_3 + Z_b}}$$

El neutro de la carga se encuentra al mismo potencial que el neutro de la fuente.

- Con sw cerrado ( $I_N \neq 0$  en general)

$$V_{N'N} = \frac{V \frac{1}{Z_1 + Z_a} + 0 + \frac{1}{Z_2} - V \frac{1}{Z_3 + Z_b}}{\frac{1}{Z_1 + Z_a} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + Z_b}}$$

$$V_{N'N} = Z_2 I_N = 0 \quad ; \quad Z_2 \neq 0 \implies I_N = 0$$

Conclusión: Se puede quitar el conductor neutro en una carga equilibrada.

**Ejemplo 3.1:** Para el circuito de la figura  $\mathbb{V} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$ , determinar los voltajes y las corrientes  $\mathbb{V}_1$ ,  $\mathbb{V}_2$ ,  $\mathbb{V}_{n'n}$ ,  $\mathbb{I}_1$ ,  $\mathbb{I}_2$  e  $\mathbb{I}_n$ , cuando:

- a) Se conecta el neutro a la carga.      b) Se desconecta el neutro de la carga.

**Solución:**

- a) Cuando el neutro se conecta a la carga, los voltajes en las mismas son iguales debido a la conexión del conductor neutro.

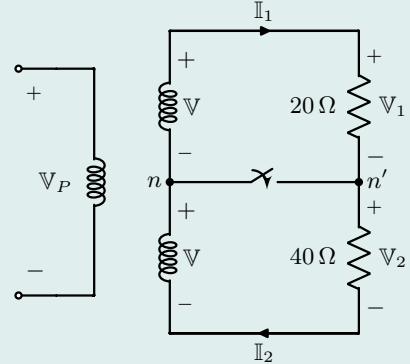
$$\mathbb{V}_1 = 120 \angle 0^\circ \text{ V} \quad \text{y} \quad \mathbb{V}_2 = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_{n'n} = 0$$

Para las corrientes se tiene:

$$\mathbb{I}_1 = \frac{120 \angle 0^\circ \text{ V}}{20 \Omega} \Rightarrow \mathbb{I}_1 = 6 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_2 = \frac{120 \angle 0^\circ \text{ V}}{40 \Omega} \Rightarrow \mathbb{I}_2 = 3 \angle 0^\circ \text{ A}$$



Si la carga es desbalanceada  $\mathbb{I}_n \neq 0$  se tiene:

$$\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2 = (6 \angle 0^\circ - 3 \angle 0^\circ) \text{ A} \Rightarrow \mathbb{I}_n = 3 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Nótese que por el neutro circula una corriente de 3 A.

- b) Si se desconecta el neutro  $\mathbb{I}_n = 0$

$$\mathbb{V}_{n'n} = \frac{120 \angle 0^\circ \text{ V} \frac{1}{20 \Omega} - 120 \angle 0^\circ \text{ V} \frac{1}{40 \Omega}}{\frac{1}{20 \Omega} + \frac{1}{40 \Omega}} \Rightarrow \mathbb{V}_{n'n} = 40 \angle 0^\circ \text{ V}$$

Debido a que la carga es desbalanceada,  $\mathbb{V}_1 \neq \mathbb{V}_2$  teniendo que:

$$\mathbb{V}_1 = \frac{20 \Omega}{20 \Omega + 40 \Omega} \cdot 2 \mathbb{V} = \frac{2}{3} \cdot 120 \angle 0^\circ \text{ V} \Rightarrow \mathbb{V}_1 = 80 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_2 = \frac{40 \Omega}{20 \Omega + 40 \Omega} \cdot 2 \mathbb{V} = \frac{4}{3} \cdot 120 \angle 0^\circ \text{ V} \Rightarrow \mathbb{V}_2 = 160 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = \frac{2 \mathbb{V}}{60 \Omega} = \frac{240 \angle 0^\circ \text{ V}}{60 \Omega} \Rightarrow \mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = 4 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Nótese que la carga de mayor impedancia soporta la mayor tensión.

**Conclusión:** Por seguridad para mantener los voltajes de tensión cercanos a los nominales, se debe conectar el conductor neutro.

## 3.2. Circuitos trifásicos

Los generadores trifásicos contienen tres fuentes de tensión sinusoidales con voltajes a la misma frecuencia pero con un cambio de fase de  $120^\circ$  entre sí. Esto se realiza colocando tres bobinas separadas  $120^\circ$  grados eléctricos en el mismo rotor. Normalmente, las amplitudes de las tres fases también son iguales. Entonces el generador es balanceado. Las tres bobinas están distribuidas equitativamente en la circunferencia del rotor desplazadas una de otra  $120^\circ$  mecánicos [?].

Consideremos el circuito de la siguiente figura:

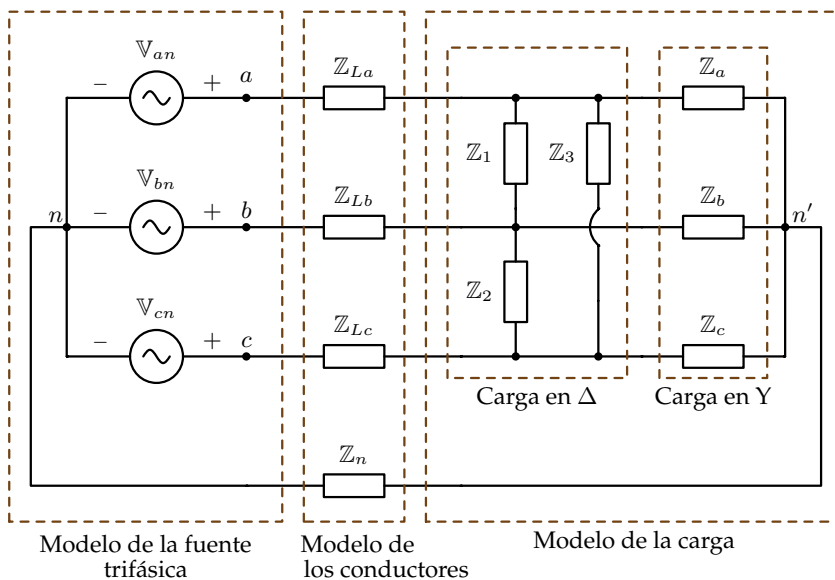


Figura 3.6. Representación de un sistema trifásico

Donde,  
 $n$ : Es el neutro de la fuente.  
 $n'$ : Es el neutro de la carga.

Acerca de la fuente trifásica:

La fuente trifásica puede ser de secuencia positiva (+), también se le conoce como secuencia  $abc$  ( $RST$ ,  $xyz$ ,  $UVW$ ) ó puede ser de secuencia negativa (-), que también se le conoce como secuencia  $acb$  ( $RTS$ ,  $xzy$ ,  $UWV$ ).

### 3.2.1. Secuencia positiva (+) ó secuencia $abc$

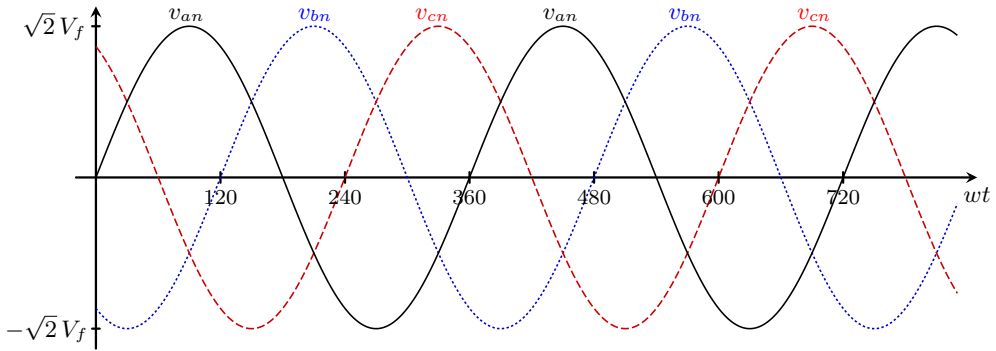
Tomando el voltaje  $v_{an}$  como fasor de referencia, es decir:

$$v_{an}(t) = \sqrt{2} V_f \sin(\omega t) \text{ V}$$

$$v_{bn}(t) = \sqrt{2} V_f \sin(\omega t - 120^\circ) \text{ V}$$

$$v_{cn}(t) = \sqrt{2} V_f \sin(\omega t + 120^\circ) \text{ V}$$

Donde  $V_f$  es el valor rms de la tensión de fase.



**Figura 3.7.** Gráfica de los voltajes de fase de la fuente trifásica ( $3\phi$ )

Una fuente de alimentación trifásica ( $3\phi$ ) balanceada es aquella en la cual, los voltajes de fase (o línea) tienen la misma magnitud y están desfasados entre ellos  $120^\circ$ .

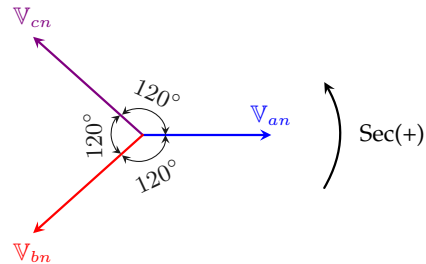
En el dominio de la frecuencia se reemplazan los voltajes  $v_{an}$ ,  $v_{bn}$ ,  $v_{cn}$  por  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$ ,  $V_{cn}$ .

Secuencia (+) *abcabc*

$$V_{an} = V_f \angle 0^\circ$$

$$V_{bn} = V_f \angle -120^\circ$$

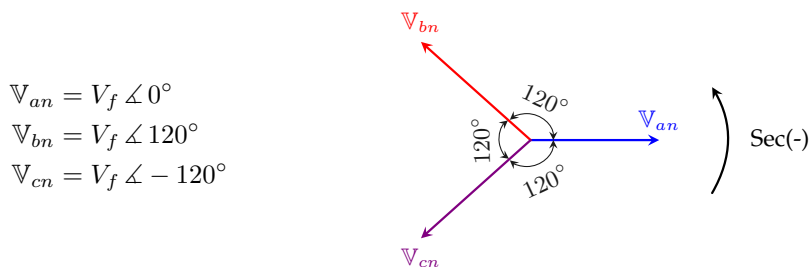
$$V_{cn} = V_f \angle 120^\circ$$



### 3.2.2. Secuencia negativa (-) ó secuencia *acb*

En un sistema de secuencia negativa, la tensión de fase  $v_{bn}(t)$  adelanta  $120^\circ$  a la tensión de fase  $v_{an}(t)$  y la tensión de fase  $v_{cn}(t)$  atrasa  $120^\circ$  a la tensión de fase  $v_{an}(t)$ . Si  $v_{an}(t)$  es el fasor que está a cero grados, entonces, en el dominio de la frecuencia, los fasores de las tensiones de fase son de la forma:

Secuencia (-) *acbacb*



### 3.2.3. Relación entre los voltajes de fase y los voltajes de línea en una fuente de alimentación trifásica balanceada

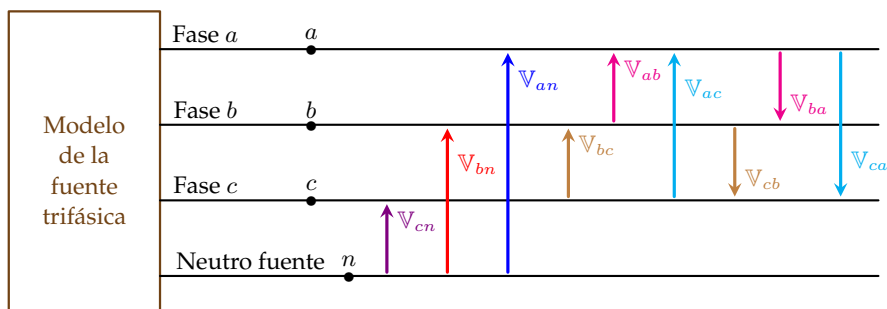


Figura 3.8. Voltajes de fase y línea

**Tensiones de fase:** Son las tensiones entre cada una de las fases y el neutro.

$$\{\mathbb{V}_{an}, \mathbb{V}_{bn}, \mathbb{V}_{cn}\}$$

**Tensiones de línea:** Son las tensiones entre cada una de las fases.

$$\text{sec (+)} \{\mathbb{V}_{ab}, \mathbb{V}_{bc}, \mathbb{V}_{ca}\} \quad ; \quad \text{sec (-)} \{\mathbb{V}_{ac}, \mathbb{V}_{cb}, \mathbb{V}_{ba}\}$$

### 3.2.4. Obtención de los voltajes de línea a partir de los voltajes de fase

Suponiendo que se conocen los voltajes de fase, que en este caso son de secuencia (+). Se determinan las tensiones de línea:

$$\overrightarrow{abcabc} \implies \mathbb{V}_{ab}, \mathbb{V}_{bc}, \mathbb{V}_{ca}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{an} &= V_f \angle 0^\circ \\ \mathbb{V}_{bn} &= V_f \angle -120^\circ \\ \mathbb{V}_{cn} &= V_f \angle 120^\circ \end{aligned}$$

### Cálculo de las tensiones de línea

#### ★ Cálculo de $V_{ab}$ :

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} = V_f \angle 0^\circ - V_f \angle -120^\circ$$

$$V_{ab} = V_f [(1 \angle 0^\circ) - (1 \angle -120^\circ)] \Rightarrow V_{ab} = \sqrt{3} V_f \angle 30^\circ$$

Usando diagrama fasorial:

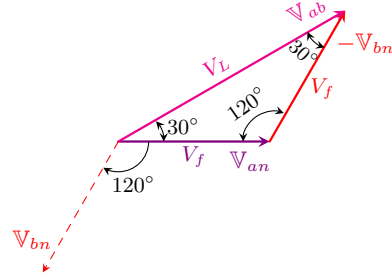
En un sistema de secuencia positiva la tensión de línea  $V_{ab}$  adelanta  $30^\circ$  a la tensión de fase  $V_{an}$ .

Del diagrama fasorial se obtiene lo siguiente:

$$\frac{V_L}{\sin 120^\circ} = \frac{V_f}{\sin 30^\circ}$$

Llegando a:

$$V_L = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot V_f \Rightarrow \boxed{V_L = \sqrt{3} V_f}$$



Donde:  $V_L$  es el valor rms de la tensión de línea  $v_{ab}(t)$ .

En el dominio del tiempo:

$$v_{ab}(t) = \sqrt{2} V_L \sin(\omega t + 30^\circ) \text{ V}$$

#### ★ Cálculo de $V_{bc}$ :

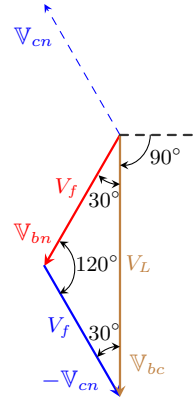
$$V_{bc} = V_{bn} - V_{cn} = V_f (1 \angle -120^\circ - 1 \angle 120^\circ) = \sqrt{3} V_f \angle -90^\circ$$

Usando diagrama fasorial:

Nótese que  $V_{bc}$  se atrasa  $120^\circ$  del fasor  $V_{ab}$ . Además en un sistema de secuencia positiva, la tensión de línea  $V_{bc}$  adelanta  $30^\circ$  a la tensión de fase  $V_{bn}$ .

En el dominio del tiempo:

$$v_{bc}(t) = \sqrt{2} V_L \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ V}$$



#### ★ Cálculo de $V_{ca}$ :

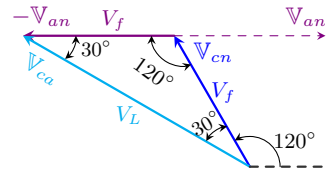
$$V_{ca} = V_{cn} - V_{an} = V_f (1 \angle 120^\circ - 1 \angle 0^\circ) = \sqrt{3} V_f \angle 150^\circ$$

Usando diagrama fasorial:

Nótese que  $V_{ca}$  adelanta  $120^\circ$  a la tensión de línea  $V_{ab}$ . Además en un sistema de secuencia positiva, la tensión de línea  $V_{ca}$  adelanta  $30^\circ$  a la tensión de fase  $V_{cn}$ .

En el dominio del tiempo:

$$v_{ca}(t) = \sqrt{2} V_L \sin(\omega t + 150^\circ) \text{ V}$$



#### ★ En resumen:

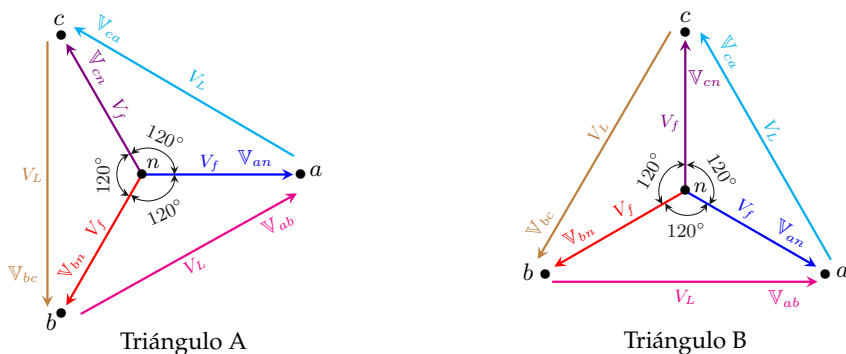
Si el sistema es de secuencia positiva (+) y  $\mathbb{V}_{an}$  es el fasor de referencia, se tienen los siguientes voltajes de fase y de línea en una fuente trifásica balanceada:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{an} &= V_f \angle 0^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{ab} &= V_L \angle 30^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{bn} &= V_f \angle -120^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{bc} &= V_L \angle -90^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{cn} &= V_f \angle 120^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{ca} &= V_L \angle 150^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Donde:  $V_L = \sqrt{3} V_f$  también se puede ver que:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{ba} &= -\mathbb{V}_{ab} = V_L \angle 150^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{cb} &= -\mathbb{V}_{bc} = V_L \angle 90^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{ac} &= -\mathbb{V}_{ca} = V_L \angle -30^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

La relación entre los voltajes de fase y los voltajes de línea de una fuente trifásica balanceada se pueden obtener del siguiente triángulo:



Nótese que si se rota el triángulo A  $30^\circ$  en sentido horario, se obtiene el triángulo B. Ahora bien:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{an} &= V_f \angle -30^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{ab} &= V_L \angle 0^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{bn} &= V_f \angle -150^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{bc} &= V_L \angle -120^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_{cn} &= V_f \angle 90^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{ca} &= V_L \angle 120^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

Nótese que:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_{ab} + \mathbb{V}_{bc} + \mathbb{V}_{ca} &= 0 \\ \mathbb{V}_{an} + \mathbb{V}_{bn} + \mathbb{V}_{cn} &= 0\end{aligned}$$

**Nota:** Si el sistema trifásico es de secuencia negativa (-) o secuencia  $acb$ , se intercambian las posiciones de  $c$  con  $b$  en el triángulo que resulta del sistema de secuencia positiva y se buscan inicialmente las tensiones de línea  $\mathbb{V}_{ac}$ ,  $\mathbb{V}_{cb}$ ,  $\mathbb{V}_{ba}$ .

En conclusión:



- En secuencia positiva (+) los voltajes de línea adelantan  $30^\circ$  a los voltajes de fase.
- En secuencia negativa (-) los voltajes de fase adelantan  $30^\circ$  a los voltajes de línea.

**Ejemplo 3.2:** Obtener las tensiones de fase y de línea de una fuente de alimentación trifásica balanceada, si:

- a)  $V_{Rn} = 120 \angle 0^\circ \text{ V Sec}(+)$ .      b)  $V_{cb} = 440 \angle 0^\circ \text{ V Sec}(-)$ .  
 c)  $V_{yz} = 220 \angle 70^\circ \text{ V Sec}(+)$ .

**Solución:**

- a)  $V_{Rn} = 120 \angle 0^\circ \text{ V Sec}(+)$  ó sec  $abc$ .

Como la fuente es trifásica balanceada:

$$V_f = 120 \text{ V} \implies V_L = \sqrt{3} V_f = \sqrt{3} \cdot 120 \text{ V} = 207,84 \text{ V}$$

Se utilizará el método del triángulo. Como el dato del problema nos da una fase  $R$ ; de los valores vistos en el triángulo se reemplazan respectivamente:  $a \rightarrow R$ ,  $b \rightarrow S$ ,  $c \rightarrow T$ . Luego:

$$\begin{aligned} V_{Rn} &= 120 \angle -30^\circ \\ V_{Sn} &= 120 \angle -150^\circ \\ V_{Tn} &= 120 \angle 90^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{RS} &= 207,84 \angle 0^\circ \\ V_{ST} &= 207,84 \angle -120^\circ \\ V_{TR} &= 207,84 \angle 120^\circ \end{aligned}$$

Los datos del problema dicen que la fase de  $V_{Rn}$  es  $0^\circ$ , luego se debe rotar el triángulo  $30^\circ$  en sentido antihorario. Finalmente:

$$\begin{aligned} V_{Rn} &= 120 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{Sn} &= 120 \angle -120^\circ \text{ V} \\ V_{Tn} &= 120 \angle 120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{RS} &= 207,84 \angle 30^\circ \text{ V} \\ V_{ST} &= 207,84 \angle -90^\circ \text{ V} \\ V_{TR} &= 207,84 \angle 150^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

- b)  $V_{cb} = 440 \angle 0^\circ \text{ V Sec}(-)$  ó sec  $acb$ .

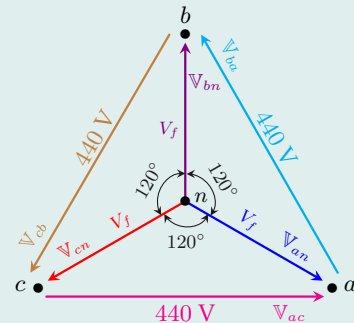
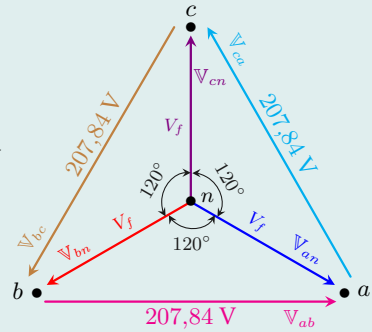
$$V_L = 440 \text{ V} \implies V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{440 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 254 \text{ V}$$

Se utilizará el método del triángulo.

Los datos del problema dicen que la fase de  $V_{cb}$  es  $0^\circ$ , luego, se debe rotar el triángulo  $120^\circ$  en sentido antihorario.

$$\begin{aligned} V_{an} &= 254 \angle 90^\circ \text{ V} \\ V_{bn} &= 254 \angle -30^\circ \text{ V} \\ V_{cn} &= 254 \angle -150^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ac} &= 440 \angle 120^\circ \text{ V} \\ V_{cb} &= 440 \angle 0^\circ \text{ V} \\ V_{ba} &= 440 \angle -120^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

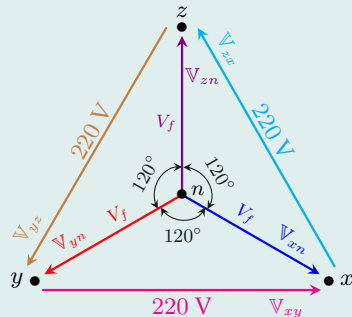


c)  $V_{yz} = 220 \angle 70^\circ \text{ V Sec}(+) \text{ ó sec } abc$

$$V_L = 220 \text{ V} \implies V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{220 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 127,01 \text{ V}$$

Se utilizará el método del triángulo.

Los datos del problema dicen que la fase de  $V_{yz}$  es  $70^\circ$ , luego, se debe rotar el triángulo  $190^\circ$  en sentido antihorario.



$$V_{xn} = 127,01 \angle 160^\circ \text{ V}$$

$$V_{xy} = 220 \angle -170^\circ \text{ V}$$

$$V_{yn} = 127,01 \angle 40^\circ \text{ V}$$

$$V_{yz} = 220 \angle 70^\circ \text{ V}$$

$$V_{zn} = 127,01 \angle -80^\circ \text{ V}$$

$$V_{zx} = 220 \angle -50^\circ \text{ V}$$

### 3.3. Circuito equivalente monofásico ( $1\phi$ )

Para una carga trifásica balanceada conectada en Y:

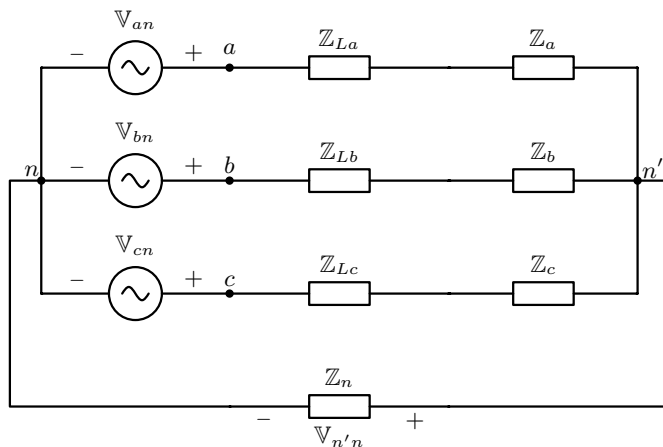


Figura 3.9. Circuito  $3\phi$  balanceado conectado en Y

$Z_{La}, Z_{Lb}, Z_{Lc}$ : Son las impedancias de los conductores que conectan la

fuerza con la carga, además  $Z_{La} = Z_{Lb} = Z_{Lc} = Z_L$

$Z_a, Z_b, Z_c$ : Son las impedancias de la carga conectadas en Y ó estrella.

$Z_n$ : Es la impedancia del conductor que conecta el neutro de la fuerza con el neutro de la carga.

Se dice que una carga 3φ es balanceada ( o equilibrada ) cuando se cumple que:

$$Z_a = Z_b = Z_c$$

Nos interesa inicialmente la corriente por el conductor neutro:  $I_n = \frac{V_{n'n}}{Z_n}$  donde  $V_{n'n}$  es el voltaje en el conductor neutro.

Aplicando el teorema de Millman en la figura 3.9 se llega a que:

$$V_{n'n} = \frac{V_{an} \frac{1}{Z_a + Z_{La}} + V_{bn} \frac{1}{Z_b + Z_{Lb}} + V_{cn} \frac{1}{Z_c + Z_{Lc}}}{\frac{1}{Z_a + Z_{La}} + \frac{1}{Z_b + Z_{Lb}} + \frac{1}{Z_c + Z_{Lc}} + \frac{1}{Z_n}}$$

Caso particular: Carga 3φ balanceada.

$$Z_{La} = Z_{Lb} = Z_{Lc} = Z_L \quad \text{y} \quad Z_a = Z_b = Z_c$$

Luego:  $Z_a + Z_{La} = Z_b + Z_{Lb} = Z_c + Z_{Lc} = Z_{equ}$

$$V_{n'n} = \frac{(V_{an} + V_{bn} + V_{cn}) \frac{1}{Z_{equ}}}{\frac{3}{Z_{equ}} + \frac{1}{Z_n}}$$

Teniendo en cuenta que la fuente 3φ es balanceada,  $V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$

En conclusión  $\boxed{V_{n'n} = 0}$  por lo tanto  $\boxed{I_n = 0}$

En un sistema trifásico balanceado (fuente y carga balanceadas) no circula corriente por el conductor neutro por lo cual se puede omitir.

Se llaman **corrientes de línea** a las corrientes  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$  y son las corrientes que entregan las fuentes de voltajes  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  y  $V_{cn}$ .

Por ejemplo en un sistema 3φ balanceado la corriente de la fase *a* es:

$$I_a = \frac{V_{an'}}{Z_{La} + Z_a} = \frac{V_{an'}}{Z_{equ}}$$

Pero como el neutro de la fuente *n* es el mismo neutro de la carga *n'* ( $V_{nn'} = 0$ ) se tiene que:

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_{equ}} \quad ; \quad I_b = \frac{V_{bn}}{Z_{equ}} \quad ; \quad I_c = \frac{V_{cn}}{Z_{equ}}$$

Cuando el sistema trifásico es de secuencia positiva y  $V_{an}$  es el fasor de referencia:

$$V_{an} = V_f \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_{equ}} = \frac{V_f}{Z_{equ}} \angle -\theta_{Z_{equ}} + 0^\circ \text{ A}$$

$$V_{bn} = V_f \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$I_b = \frac{V_{bn}}{Z_{equ}} = \frac{V_f}{Z_{equ}} \angle -\theta_{Z_{equ}} - 120^\circ \text{ A}$$

$$V_{cn} = V_f \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$I_c = \frac{V_{cn}}{Z_{equ}} = \frac{V_f}{Z_{equ}} \angle -\theta_{Z_{equ}} + 120^\circ \text{ A}$$

De lo anterior  $V_f$  es el valor rms de las tensiones de fase del generador  $3\phi$  y  $Z_{equ} = Z_{equ} \angle \theta_{Z_{equ}}$ .

En un sistema trifásico balanceado, las corrientes de línea tienen la misma magnitud y están desfasadas entre ellas  $120^\circ$  según la secuencia. Si la secuencia es positiva (+) la corriente  $I_a$  adelanta  $120^\circ$  a  $I_b$  y se atrasa  $120^\circ$  de  $I_c$ .

Lo anterior nos indica que solo se requiere calcular una corriente de línea y para las otras dos se aplica lo del párrafo anterior. Una de las corrientes (cualquiera) se determina con un *circuito monofásico* (una sola fuente de voltaje) equivalente.

Por ejemplo si se desea calcular la corriente  $I_a$ , se realiza el circuito  $1\phi$  equivalente visto en la figura 3.10.

$$I_a = \frac{V_{an}}{Z_{equ}} \quad \text{donde} \quad Z_{equ} = Z_{La} + Z_a$$

**Nota:** Para obtener el circuito equivalente monofásico ( $1\phi$ ) la carga debe estar conectada en Y.

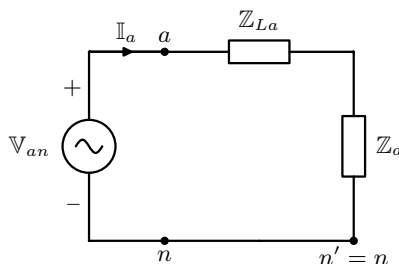
Si la carga es trifásica balanceada y está conectada en delta ( $\Delta$ ) o triángulo, se convierte (ver apéndice A.2) primero a carga equivalente conexión Y o estrella y luego se dibuja el circuito equivalente monofásico.

Nótese que si la carga es balanceada, es decir:

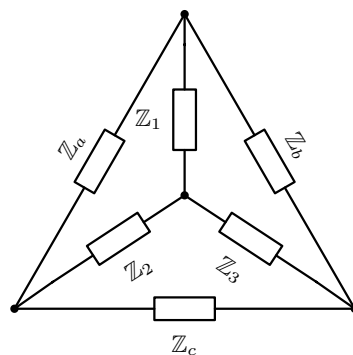
$$Z_a = Z_b = Z_c = Z_{\Delta}$$

$$Z_1 = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad ; \quad Z_2 = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad ; \quad Z_3 = \frac{Z_{\Delta}}{3}$$

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3}}$$



**Figura 3.10.** Circuito equivalente monofásico de la fase  $a$



**Figura 3.11.** Relación Y- $\Delta$  de la carga trifásica

### 3.4. Relación de corrientes en una carga conectada en $\Delta$ (triángulo) balanceada

Suponiendo el circuito de la siguiente figura:

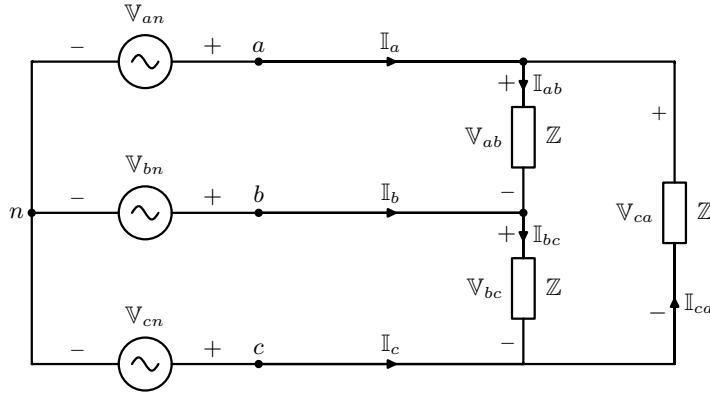


Figura 3.12. Circuito 3 $\phi$  balanceado conectado en  $\Delta$

Suponiendo que el sistema trifásico de la figura es de sec(+) o secuencia  $abc$ , se utilizan las tensiones de línea  $V_{ab}$ ,  $V_{bc}$ ,  $V_{ca}$ .

Se llaman *corrientes de fase* a las corrientes:  $I_{ab}$ ,  $I_{bc}$  e  $I_{ca}$ .

Se llaman *corrientes de línea* a las corrientes:  $I_a$ ,  $I_b$  e  $I_c$ .

- Si la carga está conectada en  $\Delta$ , las corrientes de fase son diferentes a las corrientes de línea.
- Si la carga está conectada en  $Y$ , las corrientes de fase son iguales a las corrientes de línea.

Nos interesa la relación entre las corrientes de fase y las corrientes de línea en una carga conectada en  $\Delta$  balanceada.

$$\begin{aligned} I_a &= I_{ab} - I_{ca} \\ I_b &= I_{bc} - I_{ab} \\ I_c &= I_{ca} - I_{bc} \end{aligned} \Rightarrow$$

Por ejemplo si en un sistema 3 $\phi$  se conocen las corrientes de fase:

$$I_{ab} = I_f \angle 0^\circ \quad ; \quad I_{bc} = I_f \angle -120^\circ \quad ; \quad I_{ca} = I_f \angle 120^\circ$$

Nótese que:  $I_{ab}$  es el fasor de referencia, e  $I_f$  es el valor eficaz de las corrientes de fase.

Para las corrientes de línea:

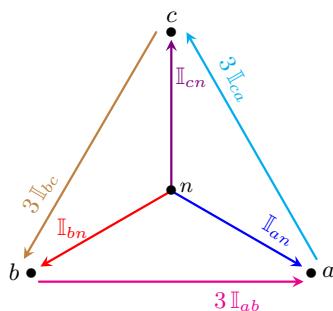
$$\begin{aligned} I_a &= I_f \angle 0^\circ - I_f \angle 120^\circ \\ I_b &= I_f \angle -120^\circ - I_f \angle 0^\circ \\ I_c &= I_f \angle 120^\circ - I_f \angle -120^\circ \end{aligned}$$

Obsérvese que:

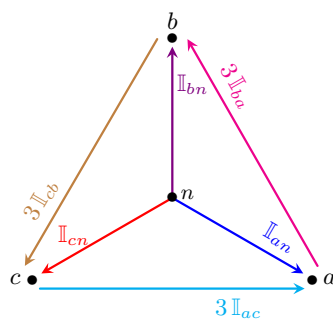
$$\begin{aligned} I_a - I_b &= \sqrt{3} I_L \angle 0^\circ = \sqrt{3} (\sqrt{3} I_f) \angle 0^\circ = 3 I_f \angle 0^\circ & \Rightarrow & I_a - I_b = 3 I_{ab} \\ I_b - I_c &= \sqrt{3} I_L \angle -120^\circ = \sqrt{3} (\sqrt{3} I_f) \angle -120^\circ = 3 I_f \angle -120^\circ & \Rightarrow & I_b - I_c = 3 I_{bc} \\ I_c - I_a &= \sqrt{3} I_L \angle 120^\circ = \sqrt{3} (\sqrt{3} I_f) \angle 120^\circ = 3 I_f \angle 120^\circ & \Rightarrow & I_c - I_a = 3 I_{ca} \end{aligned}$$

En un sistema de secuencia positiva (+), la corriente  $\mathbb{I}_{ab}$  adelanta  $30^\circ$  a la corriente  $\mathbb{I}_a$ ; la corriente  $\mathbb{I}_{ca}$  adelanta  $30^\circ$  a la corriente  $\mathbb{I}_c$ ; la corriente  $\mathbb{I}_{bc}$  adelanta  $30^\circ$  a la corriente  $\mathbb{I}_b$ .

Se puede utilizar un triángulo para obtener de forma rápida la relación entre las corrientes de fase y de línea.



Sistema de sec(+)



Sistema de sec(-)

**Ejemplo 3.3:** Para el circuito de la figura de secuencia  $RST$ , obtener:

- a)  $\mathbb{I}_R$ ,  $\mathbb{I}_S$       b)  $\mathbb{I}_{RS}$ ,  $\mathbb{I}_{ST}$ ,  $\mathbb{I}_{TR}$ .

**Solución:**

Aplicando el método del triángulo:

Corrientes de línea:

$$\mathbb{I}_R = I_L \angle -30^\circ = 10 \angle -30^\circ - 60^\circ = 10 \angle 90^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_S = I_L \angle -150^\circ = 10 \angle -150^\circ - 60^\circ = 10 \angle 150^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_T = I_L \angle 90^\circ = 10 \angle 90^\circ - 60^\circ = 10 \angle 30^\circ \text{ A}$$

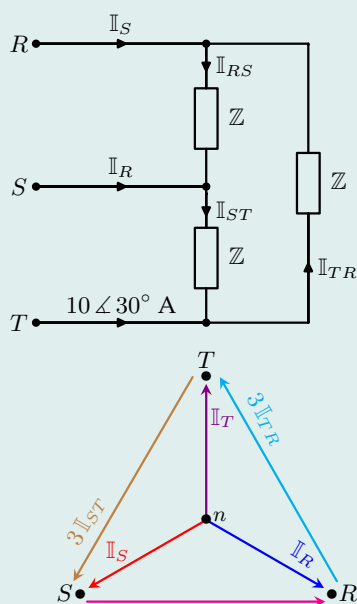
Corrientes de fase:

$$\mathbb{I}_{RS} = I_f \angle 0^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ - 60^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle -60^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_{ST} = I_f \angle -120^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle -120^\circ - 60^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 180^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_{TR} = I_f \angle 120^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 120^\circ - 60^\circ = \frac{10}{\sqrt{3}} \angle 60^\circ \text{ A}$$

Nótese que teniendo el valor dado por el ejercicio  $\mathbb{I}_T = 10 \angle 30^\circ$ , para obtenerlo se gira el triángulo  $60^\circ$  en sentido horario y luego se obtienen el resto de corrientes.



### 3.5. Potencia en sistemas trifásicos

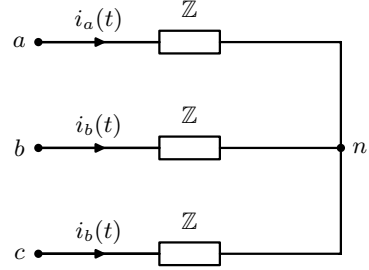
Para sistemas trifásicos balanceados o desbalanceados se cumple el principio de conservación de la potencia.

Para el circuito de la figura, la potencia instantánea que absorbe la carga es:

$$P_{3\phi}(t) = v_{an}(t) i_a(t) + v_{bn}(t) i_b(t) + v_{cn}(t) i_c(t)$$

La suma de las potencias instantáneas de cada una de las cargas son:

$$\begin{aligned} v_{an}(t) i_a(t) &= \sqrt{2} V_f \cos(\omega t) \sqrt{2} I_L \cos(\omega t - \theta_z) \\ &= 2 V_f I_L \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta_z) \end{aligned}$$



Sabiendo que:  $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$  se tiene:

$$\begin{aligned} v_{an}(t) i_a(t) &= 2 V_f I_L \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \theta_z) + \cos \theta_z] \\ v_{an}(t) i_a(t) &= V_f I_L \cos(\theta_z) + V_f I_L \cos(2\omega t - \theta_z) \end{aligned}$$

Igualmente:

$$\begin{aligned} v_{bn}(t) i_b(t) &= \sqrt{2} V_f \cos(\omega t - 120) \sqrt{2} I_L \cos(\omega t - 120 - \theta_z) \\ v_{bn}(t) i_b(t) &= V_f I_L \cos(\theta_z) + V_f I_L \cos(2\omega t - \theta_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{cn}(t) i_c(t) &= \sqrt{2} V_f \cos(\omega t + 120) \sqrt{2} I_L \cos(\omega t + 120 - \theta_z) \\ v_{cn}(t) i_c(t) &= V_f I_L \cos(\theta_z) + V_f I_L \cos(2\omega t - \theta_z) \end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en  $P_{3\phi}(t)$ , se tiene que:

$$P_{3\phi}(t) = 3 V_f I_L \cos \theta_z$$

Nótese que:

- La potencia  $3\phi$  instantánea en un sistema trifásico balanceado es constante.
- Además, su valor es igual a 3 veces la potencia *activa* de cualquiera de las cargas.

$$P_{3\phi}(t) = 3 P_{1\phi}(t) \quad \text{donde:} \quad P_{1\phi}(t) = V_f I_L \cos \theta_z \text{ W}$$

Otra forma de expresar  $P_{3\phi}(t)$  es utilizando la ecuación  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$

$$\text{Luego,} \quad P_{3\phi}(t) = 3 \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta_z \quad \Rightarrow \quad P_{3\phi}(t) = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z \text{ W}$$

Debido a que  $P_{3\phi}(t)$  es constante, su valor *promedio* que se conoce como la potencia media (ó potencia útil ó potencia activa), luego:

$$P_{3\phi} = P_{3\phi}(t) \quad \boxed{P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z \text{ W}}$$

- La anterior ecuación es válida si el sistema trifásico (fuente + carga) son balanceados.
- Similar al caso monofásico, la potencia *reactiva trifásica* en un sistema *trifásico balanceado* es igual a:

$$\boxed{Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_L \sin \theta_z \text{ VAR}}$$

- La potencia aparente trifásica, en un sistema  $3\phi$  balanceado es:

$$S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \text{ VA}}$$

- La potencia trifásica compleja, es igual a:

$$\boxed{\mathbb{S} = P_{3\phi} + jQ_{3\phi}}$$

Si el sistema es balanceado:

$$S_{3\phi} = 3 V_f I_L^* = 3 V_f I_L \angle \theta_z = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_z$$

Donde  $\theta_z$  es el ángulo de la impedancia  $\mathbb{Z}$  de la carga balanceada.

- El factor de potencia en un sistema trifásico es:

$$\boxed{\text{FP} = \frac{P_{3\phi}}{S_{3\phi}}}$$

Si el sistema  $3\phi$  es balanceado, entonces:

$$\text{FP} = \cos \theta_z \quad \begin{array}{ll} \text{sí } \theta_z < 0 & \text{el FP está en adelante} \\ \text{sí } \theta_z > 0 & \text{el FP está en atraso} \end{array}$$

Teniendo que:  $-90 \leq \theta_z \leq 90$

- Todas las anteriores cantidades de potencia, se relacionan en el triángulo de potencias:

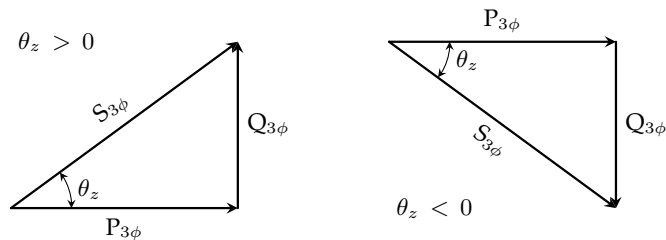


Figura 3.13. Triángulo de potencia trifásica



- Si el sistema trifásico no es balanceado, se realiza *balance de potencia*. La potencia compleja trifásica de la fuente, es igual a la suma de cada una de las potencias complejas de la carga, es decir:

$$\mathbb{S}_{3\phi} = \sum \mathbb{S}_i$$

La potencia activa de la fuente es:  $P_{3\phi} = \text{Re} \{ \mathbb{S}_{3\phi} \}$

La potencia reactiva de la fuente es:  $Q_{3\phi} = \text{Im} \{ \mathbb{S}_{3\phi} \}$

La potencia aparente es igual a:  $S_{3\phi} = ||\mathbb{S}_{3\phi}||$

### 3.5.1. Potencia $3\phi$ en una carga conectada en estrella (Y)

Para cada fase se tiene que:

$$\mathbb{S}_a = \mathbb{V}_{an} \mathbb{I}_a^* \quad ; \quad \mathbb{S}_b = \mathbb{V}_{bn} \mathbb{I}_b^* \quad ; \quad \mathbb{S}_c = \mathbb{V}_{cn} \mathbb{I}_c^*$$

Haciendo balance de potencia compleja se tiene que:

$$\mathbb{S}_{3\phi} = \mathbb{S}_a + \mathbb{S}_b + \mathbb{S}_c = \mathbb{V}_{an} \mathbb{I}_a^* + \mathbb{V}_{bn} \mathbb{I}_b^* + \mathbb{V}_{cn} \mathbb{I}_c^*$$

Suponiendo secuencia negativa (-)

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{an} &= V_f \angle 0 & \mathbb{I}_a &= I_L \angle 0 - \theta_z \\ \mathbb{V}_{bn} &= V_f \angle 120 & \mathbb{I}_b &= I_L \angle 120 - \theta_z \\ \mathbb{V}_{cn} &= V_f \angle -120 & \mathbb{I}_c &= I_L \angle -120 - \theta_z \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{S}_a + \mathbb{S}_b + \mathbb{S}_c \\ &= V_f I_L \angle \theta_z + V_f I_L \angle \theta_z + V_f I_L \angle \theta_z \end{aligned}$$

Nótese que:  $\mathbb{S}_a = \mathbb{S}_b = \mathbb{S}_c$

Luego:

$$\mathbb{S}_{3\phi} = 3 V_f I_L \angle \theta_z \quad \text{ó} \quad \mathbb{S}_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_z$$

Potencia activa:  $P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z \text{ W}$

Potencia reactiva:  $Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_z \text{ VAR}$

Potencia aparente:  $S_{3\phi} = |\mathbb{S}_{3\phi}| = \sqrt{3} V_L I_L \text{ VA}$

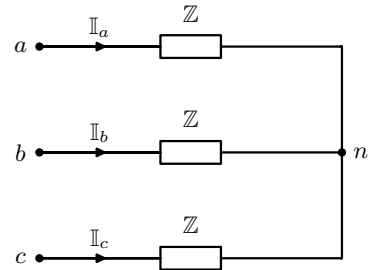


Figura 3.14. Carga conectada en Y

### 3.5.2. Potencia $3\phi$ en una carga conectada en triángulo ( $\Delta$ )

Haciendo balance de potencia compleja se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{S}_{ab} + \mathbb{S}_{bc} + \mathbb{S}_{ca} \\ \mathbb{S}_{3\phi} &= \mathbb{V}_{ab} \mathbb{I}_{ab}^* + \mathbb{V}_{bc} \mathbb{I}_{bc}^* + \mathbb{V}_{ca} \mathbb{I}_{ca}^* \end{aligned}$$

Suponiendo secuencia positiva (+)

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_L \angle 0 & I_{ab} &= \frac{V_{ab}}{Z} = I_f \angle 0 - \theta_z \\ V_{ba} &= V_L \angle -120 & I_{ba} &= \frac{V_{ba}}{Z} = I_f \angle -120 - \theta_z \\ V_{ca} &= V_L \angle 120 & I_{ca} &= \frac{V_{ca}}{Z} = I_f \angle 120 - \theta_z \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} S_{3\phi} &= S_{ab} + S_{bc} + S_{ca} \\ &= V_L \angle 0 (I_f \angle -\theta_z)^* + V_L \angle -120 (I_f \angle -120 - \theta_z)^* + V_L \angle 120 (I_f \angle 120 - \theta_z)^* \\ &= V_L I_f \angle \theta_z + V_L I_f \angle \theta_z + V_L I_f \angle \theta_z \end{aligned}$$

Nótese que:  $S_{ab} = S_{bc} = S_{ca}$  luego:  $S_{3\phi} = 3 V_L I_f \angle \theta_z$

Sí  $I_L = \sqrt{3} I_f \implies S_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_z$

Potencia activa:  $P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z \text{ W}$

Potencia reactiva:  $Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_z \text{ VAr}$

Potencia aparente:  $S_{3\phi} = |S_{3\phi}| = \sqrt{3} V_L I_L \text{ VA}$

Potencia compleja:  $S_{3\phi} = Z I_L^2 \angle \theta_z \text{ VA}$

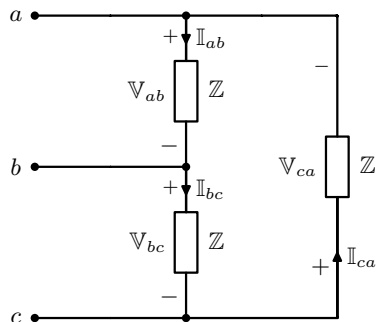


Figura 3.15. Carga conectada en  $\Delta$

**Ejemplo 3.4:** Se tiene un motor trifásico con los siguientes datos:

$V_L = 208 \text{ V}_{rms}$  ;  $FP = 0,89 \downarrow$  ;  $\eta = 90\%$  ;  $P_{mecanica} = 10 \text{ HP}$

Obtener la lectura del amperímetro.

**Solución:**

Teniendo que:  $1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$ , se halla la potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ) que consume el motor:

$$P_{elec} = \frac{746 \text{ W}}{1 \text{ HP}} \cdot 10 \text{ HP} = 7460 \text{ W}$$

Como la eficiencia del motor es del 90 % se tiene que la potencia consumida ( $P_{ent}$ ) por el motor es:

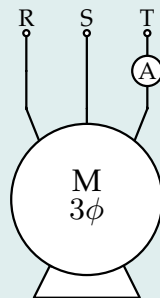
$$P_{ent} = \frac{7460 \text{ W}}{0,9} = 8288,89 \text{ W} = P_{3\phi}$$

Ahora bien, se tiene que:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z \implies I_L = \frac{8288,89 \text{ W}}{\sqrt{3} \cdot 208 \text{ V} \cdot 0,89} = 25,85 \text{ A}$$

La corriente leída por el amperímetro es:

$$I_T = 25,85 \text{ A}$$



### 3.6. Potencia suministrada por una fuente trifásica

El siguiente resultado se aplica a sistemas  $3\phi$  de 3 hilos (sin neutro) balanceados o desbalanceados y también a sistemas  $3\phi$  de 4 hilos (con neutro) balanceados.

Se utiliza balance de potencias complejas:

$$\begin{aligned} S_g &= \sum S_{fases} \\ &= V_{an} I_a^* + V_{bn} I_b^* + V_{cn} I_c^* \end{aligned}$$

Haciendo sumatoria de corrientes en el neutro se tiene:

$$I_a + I_b + I_c = 0$$

$$\text{Despejando } I_c \implies I_c = -I_a - I_b$$

Luego:

$$\begin{aligned} S_{g3\phi} &= V_{an} I_a^* + V_{bn} I_b^* + V_{cn} (-I_a - I_b)^* \\ &= \underbrace{(V_{an} - V_{cn})}_{V_{ac}} I_a^* + \underbrace{(V_{bn} - V_{cn})}_{V_{bc}} I_b^* \end{aligned}$$

Ahora bien, la potencia trifásica compleja de la fuente se puede dar por:

$$S_{g3\phi} = V_{ac} I_a^* + V_{bc} I_b^*$$

$$S_{g3\phi} = V_{ab} I_a^* + V_{cb} I_c^*$$

$$S_{g3\phi} = V_{ba} I_b^* + V_{ca} I_c^*$$

Lo anterior se aplica cuando  $I_n = 0$ .

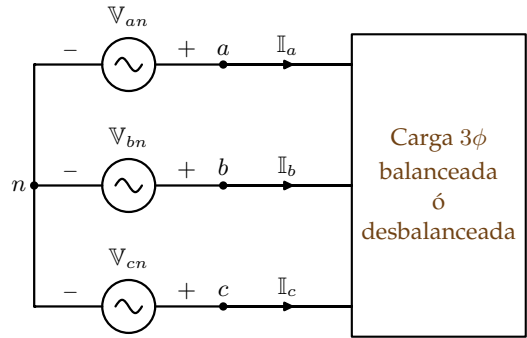


Figura 3.16. Sistemas  $3\phi$  de 3 hilos (sin neutro)

### 3.7. Potencia reactiva $3\phi$ de un banco de condensadores

#### 3.7.1. Banco de condensadores en estrella (Y)

Nota: Los 3 condensadores tienen la misma capacidad en  $\mu F$ .

La potencia reactiva del banco  $3\phi$  de condensadores es igual a:

$$Q_{3\phi} = 3 Q_{1\phi}$$

$$\text{Donde, } Q_{1\phi} = -\frac{V_f^2}{X_C} \quad \text{y} \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{Luego: } Q_{3\phi} = -3 \frac{V_f^2}{X_C}$$

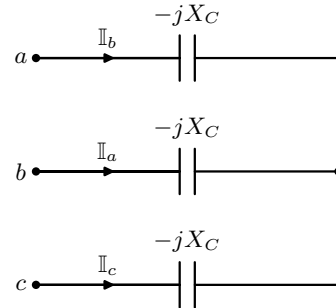


Figura 3.17. Banco de condensadores en Y

### 3.7.2. Banco de condensadores en delta ( $\Delta$ )

En este caso:  $Q_{3\phi} = -3 \frac{V_L^2}{X_C}$

Donde,  $Q_{1\phi} = -\frac{V_L^2}{X_C}$

Como,  $V_L = \sqrt{3} V_f \Rightarrow V_L^2 = 3 V_f^2$

Se tiene que:

$$Q_{3\phi} = -\frac{3}{X_C} V_L^2 = 3 \left( -\frac{3}{X_C} \right) V_f^2$$

Finalmente:

$$Q_{\Delta 3\phi} = 3 Q_{Y 3\phi}$$

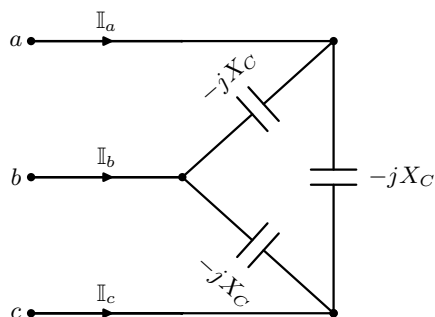


Figura 3.18. Banco de condensadores en  $\Delta$

Cabe resaltar que el banco de condensadores conectados en  $\Delta$  soporta más voltaje que la conexión en Y.

**Ejemplo 3.5:** Para el circuito de la figura, la fuente  $RST$  3 $\phi$  balanceada de secuencia positiva, tiene un  $V_L = 208$  V. El motor 3 $\phi$  tiene una potencia mecánica de 5 HP, un factor de potencia de 0,9  $\downarrow$  y su eficiencia es de 85 %. Determinar:

- La corriente nominal del interruptor (asuma que  $I_{int} = 1,25 I_L$ ).
- La capacidad en  $\mu F$  de un banco de condensadores en Y, para corregir el FP del motor a 0,98  $\downarrow$ .

**Solución:**

- Corriente de disparo del interruptor.

La potencia mecánica ( $P_{mec}$ ) de salida del motor es:

$$P_{mec} = 5 \text{ HP} \left( \frac{746 \text{ W}}{1 \text{ HP}} \right) = 3730 \text{ W}$$

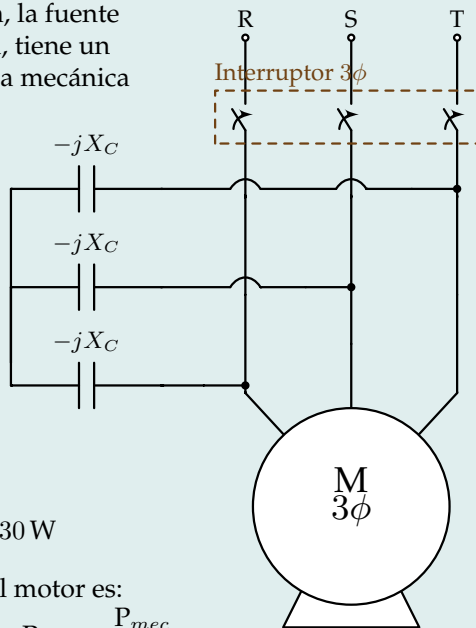
La potencia eléctrica ( $P_{elec}$ ) de entrada del motor es:

$$\eta = \frac{P_{salida}}{P_{entrada}} = \frac{P_{mec}}{P_{elec}} \Rightarrow P_{elec} = \frac{P_{mec}}{\eta}$$

$$\text{Luego: } P_{elec} = \frac{3730 \text{ W}}{0,85} = 4388,24 \text{ W}$$

Sabiendo que  $FP = \cos \theta$  y debido a que la carga es balanceada se tiene que:

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \Rightarrow I_L = \frac{P}{\sqrt{3} V_L FP} = \frac{4388,24 \text{ W}}{\sqrt{3}(208 \text{ V})(0,9)}$$



Llegando a:  $I_L = 13,53 \text{ A}$

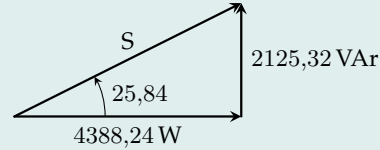
La corriente de disparo ( $I_{disp}$ ) del interruptor es:

$$I_{disp} = 1,25 I_L \implies \boxed{I_{disp} = 16,91 \text{ A}}$$

b) Cálculo de  $X_C$ . Es conveniente realizar un triángulo de potencias:

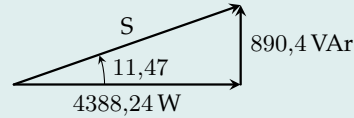
Sin el banco de condensadores:

$$\begin{aligned}\theta_z &= \cos^{-1}(0,9) = 25,84 \\ Q_{3\phi} &= P \tan \theta_z = 4388,24 \cdot \tan(25,84) \\ &= 2125,32 \text{ VAr}\end{aligned}$$



Con el banco de condensadores:

$$\begin{aligned}\theta_{z-new} &= \cos^{-1}(0,98) = 11,47 \\ Q_{3\phi-new} &= P \tan \theta_{z-new} = 4388,24 \cdot \tan(11,47) \\ &= 840,4 \text{ VAr}\end{aligned}$$



Luego, la potencia del banco de condensadores es:

$$\begin{aligned}Q_C &= Q_{3\phi-new} - Q_{3\phi-old} = 840,4 \text{ VAr} - 2125,32 \text{ VAr} \\ &= -1234,92 \text{ VAr}\end{aligned}$$

Luego:  $Q_{C-Y} = -3 \frac{V_f^2}{X_C}$  donde  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$

Teniendo que:  $-1234,92 \text{ VAr} = -3 \frac{(120)^2}{X_C}$

Hallando el valor del capacitor se tiene:

$$X_C = \frac{3 (120)^2}{1234,92 \text{ VAr}} = 34,98 \Omega = \frac{1}{\omega C}$$

Finalmente (asumiendo una frecuencia de 60 Hz):

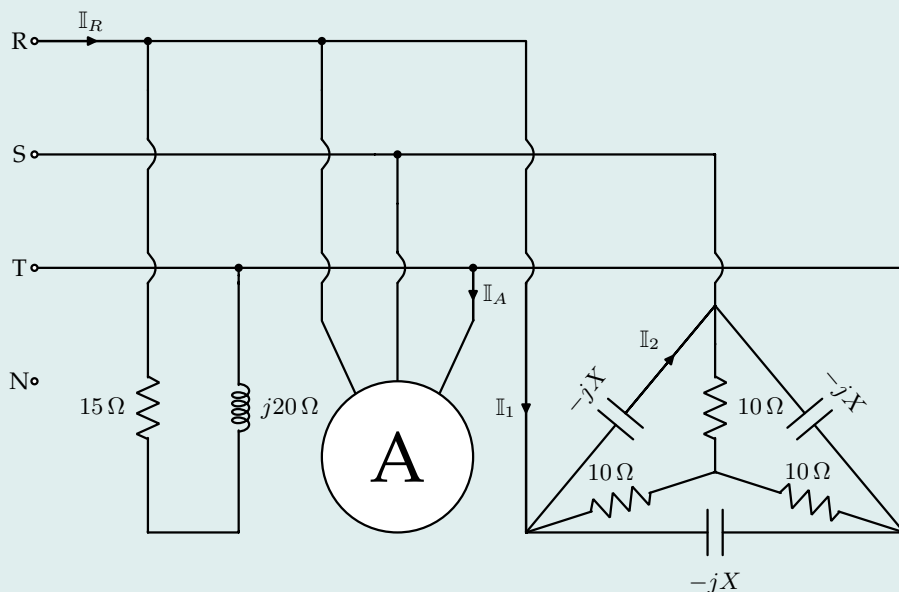
$$C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(377 \frac{\text{rad}}{\text{s}})(34,98 \Omega)} \implies \boxed{C = 75,82 \mu\text{F}}$$

Ahora bien, la corriente que entrega la fuente trifásica al conectar el banco de condensadores es:

$$S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^2 + Q_{3\phi}^2} = \sqrt{(4388,24 \text{ W})^2 + (840,4 \text{ VAr})^2} = 4477,7 \text{ VA}$$

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L = 4477,7 \text{ VA} \implies I_L = \frac{4477,7 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 208 \text{ V}} = 12,42 \text{ A}$$

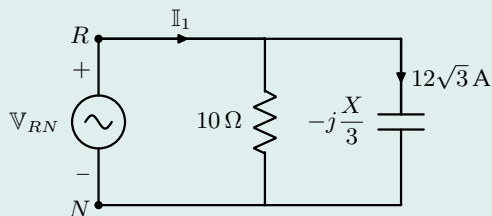
**Ejemplo 3.6:** En el circuito de la figura, la fuente trifásica balanceada de secuencia negativa  $RTS$  suministra una potencia trifásica de  $S_g = 32568 e^{-j28,392}$  VA y el voltaje de referencia es  $V_{RS} = V \angle 0^\circ$  V. La carga  $3\phi$   $\underline{A}$  está equilibrada. Las magnitudes de las corrientes  $\mathbb{I}_1$  e  $\mathbb{I}_2$  son:  $I_1 = 30$  A e  $I_2 = 12$  A. Con los datos dados, encontrar los valores de:  $X$ ,  $V$ ,  $P_A$ ,  $FP_A$ ,  $\mathbb{I}_A$  e  $\mathbb{I}_R$ .



### Solución:

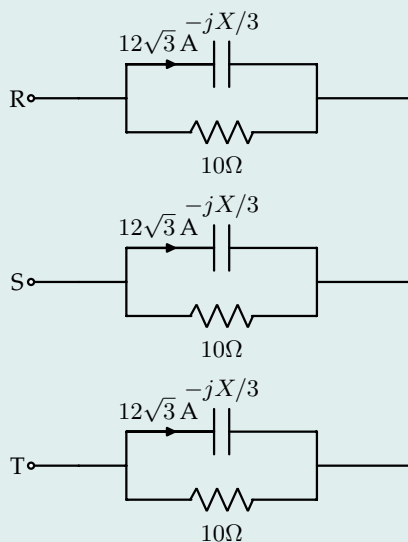
Nótese que en la carga, las resistencias están conectadas en Y y los capacitores en  $\Delta$ . Al transformar la  $\Delta$  en Y se obtiene el equivalente de carga visto en la figura 3.19.

Haciendo el equivalente monofásico de la fase R se tiene:



Como la fuente trifásica es balanceada y el ejercicio nos da que:

$$V_{RS} = V \angle 0^\circ \text{ V} \implies V_{SR} = V \angle 180^\circ \text{ V}$$



**Figura 3.19.** Equivalente en Y de la carga

El resto de voltajes se obtienen utilizando el triángulo de voltajes (sabiendo que  $V = V_L$  y girándolo  $120^\circ$  en sentido horario) obteniendo que:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_R &= V_f \angle 30^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{RT} &= V_L \angle 60^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_T &= V_f \angle -90^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{TS} &= V_L \angle -60^\circ \text{ V} \\ \mathbb{V}_S &= V_f \angle 150^\circ \text{ V} & \mathbb{V}_{SR} &= V_L \angle 180^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

Del equivalente monofásico:

Con  $\mathbb{V}_{RN} = \frac{V}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \text{ V}$  se tiene que:

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_R + \mathbb{I}_X \implies 30 \angle \theta_1 = I_R \angle 30 + 12\sqrt{3} \angle 30 - (-90)$$

Usando diagrama fasorial:

Se puede observar que el diagrama fasorial forma un triángulo rectángulo hallando con facilidad el valor de  $I_R$  es:

$$I_R = \sqrt{30^2 - (12\sqrt{3})^2} \implies I_R = 21,633 \text{ A}$$

Luego:  $\alpha = \sin^{-1} \left( \frac{21,63}{30} \right) = 46,137$

Teniendo que:  $\theta_1 = 120 - 46,137 = 73,87$ , se obtiene el valor de  $\mathbb{I}_1$ :

$$\mathbb{I}_1 = 30 \angle 73,87 \text{ A}$$

De  $I_R$  se sabe que:  $I_R = \frac{V/\sqrt{3}}{10 \Omega} = 21,63 \text{ A} \implies V = 21,63 \text{ A} \cdot (10\sqrt{3})\Omega = 374,64 \text{ V}$

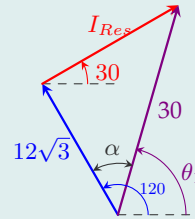
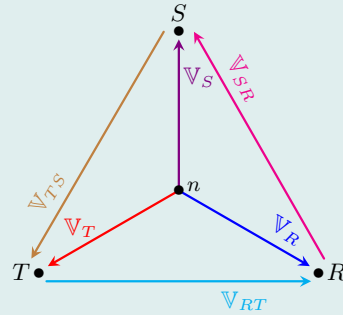
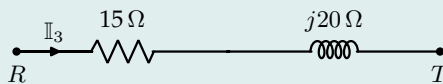
Los voltajes de línea y de fase de la fuente trifásica son:

$$\boxed{V_L = 374,64 \text{ V}} \quad ; \quad \boxed{V_f = 216,3 \text{ V}}$$

Calculando el valor de  $X$ :

$$\frac{X}{3} = \frac{216,3 \text{ V}}{12\sqrt{3} \text{ A}} \implies X = 31,22 \Omega$$

Hallando la corriente que pasa por la carga desbalanceada:



$$\mathbb{I}_3 = \frac{\mathbb{V}_{RT}}{(15 + j20)\Omega} = \frac{374,64 \angle 60^\circ \text{ V}}{(15 + j20)\Omega} = 14,98 \angle 6,86^\circ \text{ A}$$

Hallando la potencia trifásica en la carga desbalanceada:

$$\mathbb{S}_{cd} = \mathbb{V} \mathbb{I}^* = 374,64 \angle 60^\circ \text{ V} \cdot (14,98 \angle 6,86 \text{ A})^* = 5612,11 \angle 53,14 \text{ VA}$$

Hallando la potencia trifásica en la carga balanceada (o se encuentra  $\mathbb{Z}_{equ}$ ) donde:

$$\theta_z = \theta_v - \theta_i = 30^\circ - 73,87^\circ = -43,87$$

$$\mathbb{S}_{cb} = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_z = \sqrt{3} \cdot 374,64 \text{ V} \cdot 30 \text{ A} \angle -43,87 = 19466,9 \angle -43,87 \text{ VA}$$

Hallando la potencia trifásica en la carga A:

$$\text{Por balance de potencias: } \mathbb{S}_g = \mathbb{S}_{cd} + \mathbb{S}_A + \mathbb{S}_{cb} \implies \mathbb{S}_A = \mathbb{S}_g - \mathbb{S}_{cd} - \mathbb{S}_{cb}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_A &= (32568 e^{-j28,392} - 5612,11 e^{j53,14} - 19466,9 e^{-j43,87}) \text{ VA} \\ &= 12983,9 e^{-j29,98} \text{ VA} \end{aligned}$$

Hallando  $P_A$  y  $FP_A$ :

$$P_A = 12983,9 \text{ VA} \cos(-29,98) \implies \boxed{P_A = 11246,65 \text{ W}}$$

$$FP_A = \cos(-29,98) \uparrow \implies \boxed{FP_A = 0,86 \uparrow}$$

Calculando la corriente  $\mathbb{I}_A$ :

$$S_A = \sqrt{3} V_L I_L \implies I_A = \frac{S_A}{\sqrt{3} \cdot V_L} = \frac{12983,9 \text{ VA}}{\sqrt{3} \cdot 374,64 \text{ V}} = 20 \text{ A}$$

Hallando el ángulo  $\theta_{IA}$ :

$$\theta_{IA} = \theta_{VT} - \theta_{ZA} = -90 - (-29,8) = -60,2$$

$$\text{Teniendo que: } \boxed{\mathbb{I}_A = 20 \angle -60,2 \text{ A}}$$

Se observa que  $\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_{TA}$ , como la secuencia es  $RTS$ ,  $\mathbb{I}_{RA}$  adelanta 120 la corriente  $\mathbb{I}_{TA} \implies \mathbb{I}_{RA} = 20 \angle 59,8 \text{ A}$

Finalmente hallando  $\mathbb{I}_R$ :

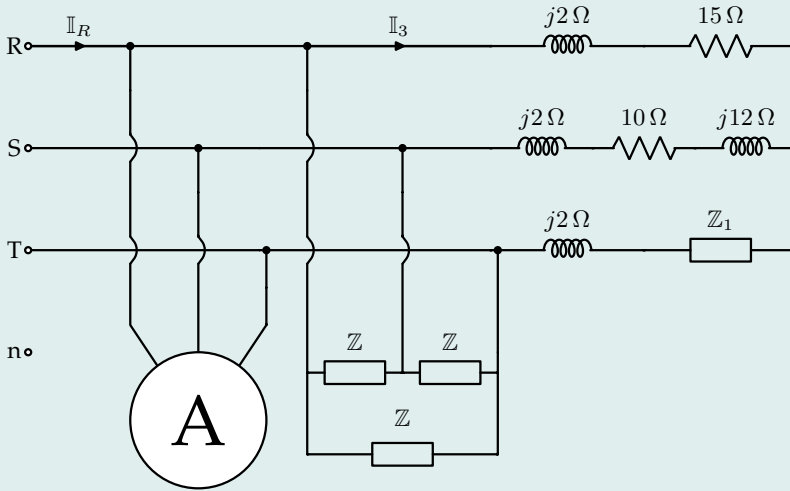
$$\begin{aligned} \mathbb{I}_R &= \mathbb{I}_{Rcb} + \mathbb{I}_{RA} + \mathbb{I}_{Rcd} \\ &= (14,98 \angle 6,86 + 20 \angle 59,8 + 30 \angle 73,87) \text{ A} \end{aligned}$$

$$\text{Teniendo que: } \boxed{\mathbb{I}_R = 58,31 \angle 55,21 \text{ A}}$$



**Ejemplo 3.7:** En el circuito de la figura, la fuente trifásica balanceada de secuencia negativa  $RTS$  tiene una frecuencia de 60 Hz y se toma como voltaje de referencia  $\mathbb{V}_{TR} = 480 \angle 0^\circ \text{ V}$ ; además  $\mathbb{I}_R = 37,67 \angle 104,6^\circ \text{ A}$  e  $\mathbb{I}_3 = 3,8 \angle 132,44^\circ \text{ A}$ . La carga 3 $\phi$   $\Delta$  está equilibrada. La impedancia de la carga en  $\Delta$  es  $\mathbb{Z} = 60 \angle 30^\circ \Omega$ . Hallar:

- ★ El valor de  $\mathbb{Z}_1$
- ★ La potencia compleja de la carga conformada por las tres impedancias  $\mathbb{Z}$  en  $\Delta$ .
- ★ La potencia activa y el FP de la carga A.
- ★ El FP del generador.
- ★ Los faradios de un condensador que forme parte de un banco de condensadores conectados en  $\Delta$ , en paralelo con la fuente que corrija el FP de la instalación a 0,95  $\downarrow$ .



**Solución:**

Se tiene que:  $V_L = 480 \text{ V}$  ;  $V_f = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = 277,12 \text{ V}$

También:  $\mathbb{V}_{RT} = -\mathbb{V}_{TR} = 480 \angle 180^\circ \text{ V}$

El resto de voltajes se obtienen utilizando el triángulo de voltajes (girándolo  $180^\circ$ ) obteniendo que:

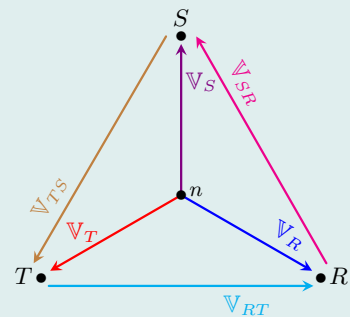
$$\mathbb{V}_R = V_f \angle -30^\circ \pm 180^\circ \text{ V} = 277,12 \angle 150^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_S = V_f \angle 90^\circ \pm 180^\circ \text{ V} = 277,12 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_T = V_f \angle -150^\circ \pm 180^\circ \text{ V} = 277,12 \angle 30^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_{RT} = V_L \angle 0^\circ + 180^\circ \text{ V} = 480 \angle 180^\circ \text{ V} ; \quad \mathbb{V}_{TS} = V_L \angle -120^\circ \pm 180^\circ \text{ V} = 480 \angle 60^\circ \text{ V}$$

$$\mathbb{V}_{SR} = V_L \angle 120^\circ \pm 180^\circ \text{ V} = 480 \angle -60^\circ \text{ V}$$



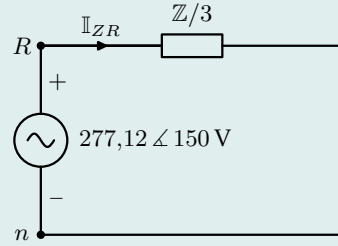
★ Potencia compleja en la carga conectada en  $\Delta$ :

Para hallar la corriente de la carga conectada en  $\Delta$ , se utiliza un circuito equivalente monofásico ya que la carga es balanceada, al igual que la fuente de alimentación:

Para el equivalente monofásico la carga debe estar en estrella, transformando de  $\Delta$  a  $Y$  el valor de la impedancia queda:  $Z_Y = \frac{Z}{3} = 20 \angle 30^\circ \Omega$

Del equivalente monofásico se obtiene el valor de  $I_{ZR}$ :

$$I_{ZR} = \frac{277,12 \angle 150^\circ \text{ V}}{20 \angle 30^\circ \Omega} = 13,85 \angle 120^\circ \text{ A}$$



Debido a que la carga es balanceada, las otras corrientes son:

$$I_{ZS} = 13,85 \angle -120^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad I_{ZT} = 13,85 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Hallando la potencia en la carga se tiene:

$$S_{Z-3\phi} = 3 \cdot S_{Z-1\phi} = 3 V_R I_{ZR}^* = 3(277,12 \angle 150^\circ \text{ V})(13,85 \angle 120^\circ \text{ A})^*$$

Luego:

$$S_{Z-3\phi} = \underbrace{9971,7 \text{ W}}_{P_{Z-3\phi}} + j \underbrace{5757,16 \text{ VAR}}_{Q_{Z-3\phi}}$$

Otra forma de hallar la potencia activa y reactiva de la carga (donde  $\theta_z = 30^\circ$ ) es:

$$P_{Z-3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_z = \sqrt{3}(480 \text{ V})(13,85 \text{ A}) \cos 30^\circ = 9972 \text{ W}$$

$$Q_{Z-3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_z = \sqrt{3}(480 \text{ V})(13,85 \text{ A}) \sin 30^\circ = 5757,33 \text{ VAR}$$

★ Potencia activa y FP de la carga A:

Con los valores de las corrientes de la fase  $R$  en la carga balanceada y la carga desbalanceada, además el valor de la corriente que suministra la fuente trifásica por esta fase, se puede hallar la corriente de la carga  $\underline{A}$  en la fase  $R$ :

$$I_{AR} = I_R - (I_{ZR} + I_3) = [(37,67 \angle 104,6^\circ) - (13,85 \angle 120^\circ + 3,8 \angle 132,44^\circ)] \text{ A}$$

Luego:  $I_{AR} = 21,62 \angle 90,03^\circ \text{ A}$

Debido a que la carga  $\underline{A}$  es balanceada y los voltajes que la alimentan también, el resto de corrientes en la carga son:

$$I_{AS} = 21,62 \angle -149,97^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad I_{AT} = 21,62 \angle -29,97^\circ \text{ A}$$

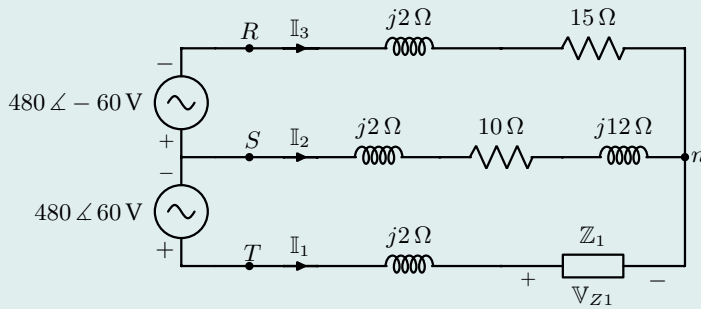
Hallando la potencia de la carga  $\underline{A}$  se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{3\phi-A} &= 3 \cdot \mathbb{S}_{1\phi-A} = 3 \mathbb{V}_R \mathbb{I}_{AR}^* = 3(277,12 \angle 150^\circ \text{ V})(21,62 \angle 90,03^\circ \text{ A})^* \\ \mathbb{S}_{3\phi-A} &= 179,74 \angle 59,97^\circ \text{ kVA}\end{aligned}$$

Teniendo que:

$$\boxed{P_A = \operatorname{Re}\{\mathbb{S}_{3\phi-A}\} = 8995,15 \text{ W}} \quad \text{y} \quad \boxed{\text{FP} = \cos 59,97^\circ = 0,5 \downarrow}$$

★ Cálculo de  $\underline{Z}_1$ :



De los datos del problema se tiene que:  $\mathbb{I}_3 = 3,8 \angle 132,44^\circ \text{ A}$ ; aunque la carga es desbalanceada se alimenta con voltajes balanceados por lo cual de la malla superior de la figura, se llega a que:

$$\mathbb{I}_2 = \frac{\mathbb{V}_{SR} + [(15 + j2) \Omega \cdot \mathbb{I}_3]}{(10 + j14) \Omega} \implies \mathbb{I}_2 = 24,78 \angle -117,11^\circ \text{ A}$$

Sabiendo que:  $\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3 = 0 \implies \mathbb{I}_1 = -(\mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_3)$

Luego:  $\mathbb{I}_1 = -(24,78 \angle -117,11^\circ + 3,8 \angle 132,44^\circ) \text{ A} = 23,72 \angle 54,25^\circ \text{ A}$

De la malla inferior del circuito desbalanceado de la figura se tiene que:

$$\mathbb{V}_{Z1} = -j2 \mathbb{I}_1 + \mathbb{V}_{TS} + (10 + j14) \Omega \cdot \mathbb{I}_2 \implies \mathbb{V}_{Z1} = 474,47 \angle 1,12^\circ \text{ V}$$

$$\text{Luego: } \mathbb{Z}_1 = \frac{\mathbb{V}_{Z1}}{\mathbb{I}_1} = \frac{474,47 \angle 1,12^\circ \text{ V}}{23,72 \angle 54,25^\circ \text{ A}} \implies \boxed{\mathbb{Z}_1 = 20 \angle -53,13^\circ \Omega}$$

★ Cálculo del FP del generador:

Se calcula la potencia compleja del generador:  $\mathbb{S}_g = \mathbb{V}_R \mathbb{I}_R^* + \mathbb{V}_S \mathbb{I}_S^* + \mathbb{V}_T \mathbb{I}_T^*$

El ejercicio nos da el valor de  $\mathbb{I}_R$ . Hallando  $\mathbb{I}_S$  e  $\mathbb{I}_T$ :

$$\mathbb{I}_S = \mathbb{I}_{AS} + \mathbb{I}_{ZS} + \mathbb{I}_2 = 21,62 \angle -149,97^\circ \text{ A} + 13,85 \angle -120^\circ \text{ A} + 24,78 \angle -117,11^\circ \text{ A}$$

$$\mathbb{I}_T = \mathbb{I}_{AT} + \mathbb{I}_{ZT} + \mathbb{I}_1 = 21,62 \angle -29,97^\circ \text{ A} + 13,85 \angle 0^\circ \text{ A} + 23,72 \angle 54,25^\circ \text{ A}$$

Teniendo que:  $\mathbb{I}_S = 58,11 \angle -129,45^\circ \text{ A}$  e  $\mathbb{I}_T = 47,2 \angle 10,31^\circ \text{ A}$

Ahora bien, la potencia compleja del generador es:

$$\mathbb{S}_g = 277,12 \angle 150^\circ \text{ V} \cdot (37,67 \angle 104,6^\circ \text{ A})^* + 277,12 \angle -90^\circ \text{ V} \cdot (58,11 \angle -129,45^\circ \text{ A})^* \\ + 277,12 \angle 30^\circ \text{ V} \cdot (47,2 \angle 10,31^\circ \text{ A})^*$$

$$\mathbb{S}_g = 38939,7 \angle 34,53^\circ \text{ VA}$$

Luego:  $\text{FP}_g = \cos 34,53^\circ \Rightarrow \boxed{\text{FP}_g = 0,82 \downarrow}$

★ Banco de condensadores:

Se desea corregir el FP del generador a  $0,95 \downarrow$  teniendo que:

$$\theta_{\text{new}} = \cos^{-1} 0,95 = 18,2^\circ$$

Luego:  $Q_{g-\text{new}} = P_g \tan \theta_{\text{new}} = 10547,3 \text{ VAr}$

Hallando la potencia reactiva que consumirán los capacitores:

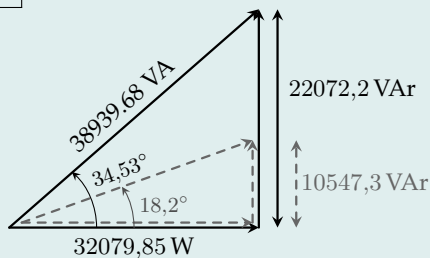
$$Q_C = Q_{g-\text{new}} - Q_{g-\text{old}} = (10547,3 - 22072,2) \text{ VAr} = -11524,8 \text{ VAr}$$

Hallando el valor de los capacitores del banco:

$$Q_C = -3 \frac{V_L^2}{X_C} \Rightarrow -11524,8 \text{ VAr} = -3 \frac{(480 \text{ V})^2}{X_C}$$

Llegando a que:  $X_C = 59,97 \Omega$

Finalmente,  $C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{(377 \frac{\text{rad}}{\text{s}})(59,97 \Omega)} \Rightarrow \boxed{C = 44,23 \mu\text{F}}$



## 3.8. Medición de potencia trifásica

Para la medición de la potencia en sistemas trifásicos existen varios métodos, algunos de ellos son:

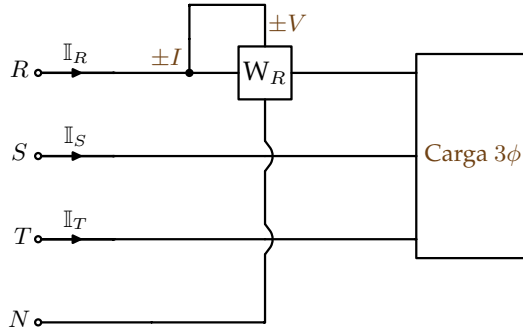
### 3.8.1. Cuando se tiene acceso al neutro de la fuente

Se tiene que:  $W_R = V_{RN} I_R \cos(\theta_{V_{RN}} - \theta_{I_R})$

Igualmente para las otras dos fases obteniendo que:  $P_{3\phi} = W_R + W_S + W_T$

Si la carga es  $RL$  balanceada ( $Z = Z \angle \theta$ ) entonces:  $W_R = V_f I_f \cos \theta$

$$P_{3\phi} = 3 W_R = 3 V_f I_f \cos \theta = \sqrt{3}(\sqrt{3} V_f) I_f \cos \theta \Rightarrow P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_f \cos \theta$$



**Figura 3.20.** Medición de la potencia trifásica cuando se tiene acceso al neutro de la fuente

### 3.8.2. Cuando se tiene acceso al neutro de la carga

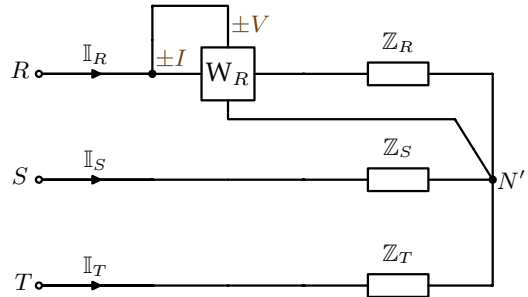
Se tiene que:

$$W_R = V_{RN'} I_R \cos(\theta_{V_{RN'}} - \theta_{I_R})$$

Igualmente para las otras dos fases obteniendo que:

$$P_{3\phi} = W_R + W_S + W_T$$

Un caso particular para esta medida es cuando la carga  $RL$  es balanceada ( $N = N'$ ) entonces:



**Figura 3.21.** Medición de la potencia trifásica cuando se tiene acceso al neutro de la carga

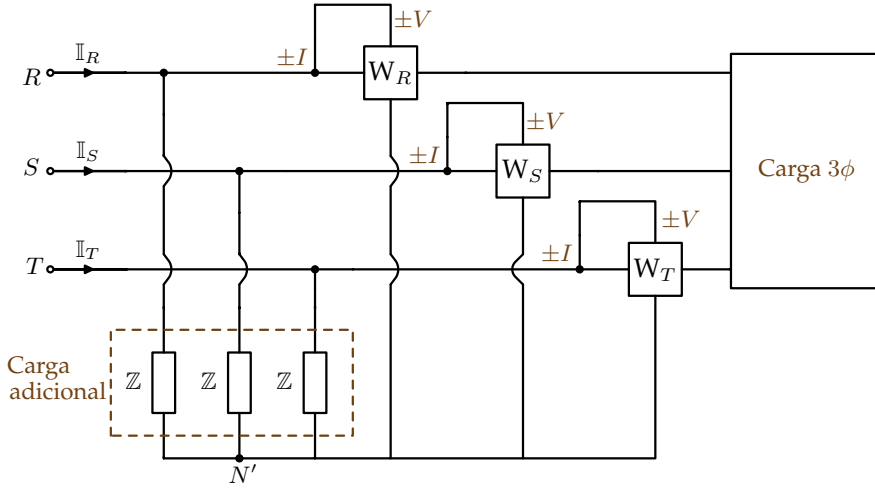
$$W_R = V_f I_f \cos \theta \implies P_{3\phi} = 3 W_R = \sqrt{3} V_L I_f \cos \theta$$

### 3.8.3. Cuando no se tiene acceso al neutro de la fuente ni al neutro de la carga

Si la carga trifásica a la cual se quiere medir la potencia es balanceada, el neutro de la fuente ( $N'$ ) se puede obtener conectando una *carga adicional* balanceada en Y. Luego, la potencia activa trifásica de la carga es:

$$P_{3\phi} = W_R + W_S + W_T$$

Cuando la carga es equilibrada:  $P_{3\phi} = 3 W_R = \sqrt{3} V_L I_f \cos \theta$



**Figura 3.22.** Medición de la potencia trifásica cuando no se tiene acceso al neutro de la fuente ni al neutro de la carga

### 3.8.4. Método de los dos vatímetros

Se utiliza para medir la potencia activa y reactiva  $3\phi$  de una carga balanceada.

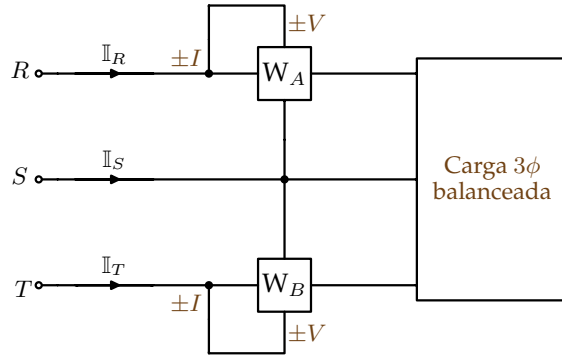
$$\boxed{W_A} \begin{cases} \text{Mide corriente } |I_R| \\ \text{Mide voltaje } |V_{RS}| \end{cases}$$

además  $\cos(\theta_{V_{RS}} - \theta_{I_R})$

$$\boxed{W_B} \begin{cases} \text{Mide corriente } |I_T| \\ \text{Mide voltaje } |V_{TS}| \end{cases}$$

además  $\cos(\theta_{V_{TS}} - \theta_{I_T})$

Vamos a suponer que la fuente trifásica es secuencia positiva  $RST$  y la carga  $3\phi$  balanceada tiene FP en atraso.



**Figura 3.23.** Método de los dos vatímetros

$$V_{RN} = V_f \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$V_{SN} = V_f \angle -120^\circ \text{ V}$$

$$V_{TN} = V_f \angle 120^\circ \text{ V}$$

$$I_R = I_L \angle -\theta_Z \text{ A}$$

$$I_S = I_L \angle (-120 - \theta_Z) \text{ A}$$

$$I_T = I_L \angle (120 - \theta_Z) \text{ A}$$

Teniendo que:

$$\theta_{I_R} = -\theta_Z \quad ; \quad \theta_{V_{RS}} = 30^\circ \quad ; \quad \theta_{I_T} = 120 - \theta_Z \quad ; \quad \theta_{V_{TS}} = 90^\circ$$

Luego:

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{V_{RS}} - \theta_{I_R}) &= \cos(30 - (-\theta_Z)) = \cos(\theta_Z + 30) \\ \cos(\theta_{V_{TS}} - \theta_{I_T}) &= \cos(90 - (-120 - \theta_Z)) = \cos(\theta_Z - 30)\end{aligned}$$

De lo anterior, sabiendo que  $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$  y aplicando identidades trigonométricas<sup>1</sup> a la lectura de los vatímetros se tiene:

$$\begin{aligned}W_A &= V_L I_L \cos(\theta_Z + 30) = V_L I_L \cos(\theta_Z) \cos(30) - V_L I_L \sin(\theta_Z) \sin(30) \\ W_B &= V_L I_L \cos(\theta_Z - 30) = V_L I_L \cos(\theta_Z) \cos(30) + V_L I_L \sin(\theta_Z) \sin(30)\end{aligned}$$

Recordando que en una carga trifásica balanceada:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_Z \quad ; \quad Q_{3\phi} = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_Z$$

Ahora bien, para medir la potencia activa  $3\phi$  en una carga balanceada usando dos vatímetros se tiene:

$$W_A + W_B = \frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L \cos(\theta_Z) + \frac{\sqrt{3}}{2} V_L I_L \cos(\theta_Z) = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_Z$$

Obteniendo que:

$$\boxed{P_{3\phi} = W_A + W_B}$$

Para medir la potencia reactiva  $3\phi$  en una carga balanceada usando dos vatímetros se tiene:

$$\sqrt{3}(W_A - W_B) = \frac{1}{2} V_L I_L \sin(\theta_Z) + \frac{1}{2} V_L I_L \sin(\theta_Z) = \sqrt{3}(V_L I_L \sin \theta_Z)$$

Obteniendo que:

$$\boxed{Q_{3\phi} = \sqrt{3} |W_A - W_B|}$$

Con las lecturas de los vatímetros también se puede hallar el valor de  $\theta_Z$ :

$$\theta_Z = \arctan \left( \frac{\sqrt{3} |W_A - W_B|}{W_A + W_B} \right)$$

### 3.8.5. Método de los tres vatímetros

Este método se aplica para medir potencia reactiva  $3\phi$  de una carga balanceada o desbalanceada.

---

<sup>1</sup> $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$   
 $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

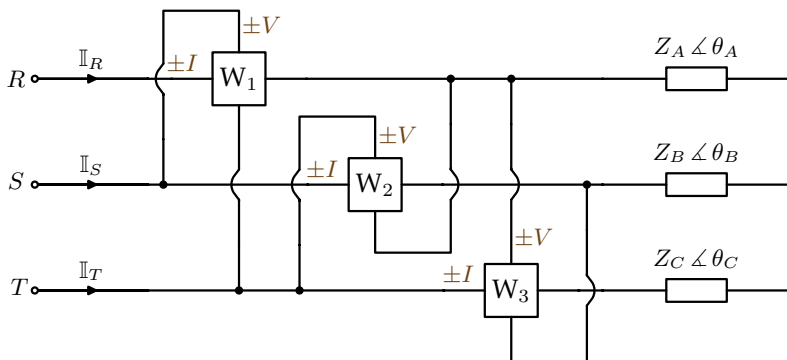


Figura 3.24. Método de los tres vatímetros

$W_1$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mide corriente }  I_R  \\ \text{Mide voltaje }  V_{ST}  \end{array} \right.$	además	$\cos(\theta_{V_{TS}} - \theta_{I_R})$
$W_2$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mide corriente }  I_S  \\ \text{Mide voltaje }  V_{TR}  \end{array} \right.$	además	$\cos(\theta_{V_{TR}} - \theta_{I_S})$
$W_3$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Mide corriente }  I_T  \\ \text{Mide voltaje }  V_{RS}  \end{array} \right.$	además	$\cos(\theta_{V_{RS}} - \theta_{I_T})$

Suponiendo que el sistema trifásico es de secuencia positiva:

$V_{RN} = V_f \angle 0^\circ \text{ V}$	$I_R = I_R \angle -\theta_A \text{ A}$
$V_{SN} = V_f \angle -120^\circ \text{ V}$	$I_S = I_S \angle (-120 - \theta_B) \text{ A}$
$V_{TN} = V_f \angle 120^\circ \text{ V}$	$I_T = I_T \angle (120 - \theta_C) \text{ A}$

Teniendo que:

$\theta_{V_{RS}} = 30$	$\theta_{V_{ST}} = -90$	$\theta_{V_{TR}} = 150$
$\theta_{I_R} = -\theta_A$	$\theta_{I_S} = -120 - \theta_B$	$\theta_{I_T} = 120 - \theta_C$

Luego:

$$W_1 = V_L I_R \cos(-90 - (\theta_A)) = \sqrt{3} V_f I_R \cos(\theta_A - 90)$$

$$W_2 = V_L I_S \cos(150 - (-120 - \theta_B)) = \sqrt{3} V_f I_S \cos(\theta_B - 90)$$

$$W_3 = V_L I_T \cos(30 - (120 - \theta_C)) = \sqrt{3} V_f I_T \cos(\theta_C - 90)$$

Llegando a:

$$W_1 = \sqrt{3} V_f I_R \sin \theta_A = \sqrt{3} Q_R$$

$$W_2 = \sqrt{3} V_f I_S \sin \theta_B = \sqrt{3} Q_S$$

$$W_3 = \sqrt{3} V_f I_T \sin \theta_C = \sqrt{3} Q_T$$



Nótese que:

$$W_1 + W_2 + W_3 = \sqrt{3} (Q_R + Q_S + Q_T) = \sqrt{3} Q_{3\phi}$$

Finalmente, la potencia reactiva  $3\phi$  de la carga desbalanceada se obtiene así:

$$Q_{3\phi} = \frac{1}{\sqrt{3}} (W_1 + W_2 + W_3)$$

Cuando se tiene que la carga es trifásica balanceada  $Q_R = Q_S = Q_T$ :

$$W_1 = \sqrt{3} Q_R \quad ; \quad W_2 = \sqrt{3} Q_S \quad ; \quad W_3 = \sqrt{3} Q_T$$

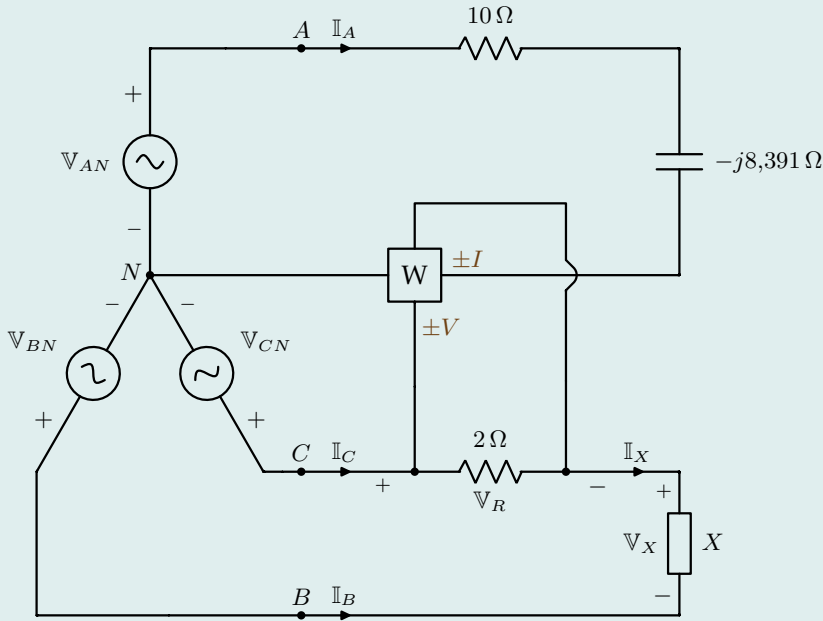
Como  $W_1 = W_2 = W_3$  se tiene que:

$$3 W_1 = \sqrt{3} (Q_R + Q_S + Q_T) = \sqrt{3} Q_{3\phi} \implies Q = \frac{3 W_1}{\sqrt{3}}$$

Cuando la carga es balanceada:

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3} W_1$$

**Ejemplo 3.8:** La fuente trifásica del circuito de la figura es de secuencia positiva  $ABC$  y se tiene que  $V_{CB} = 173,2 \angle 0^\circ \text{ V}$ , además la lectura del vatímetro es  $0 \text{ W}$ .



Hallar:

- El valor de  $V_{AC}$ .
- La potencia absorbida por la resistencia de  $10 \Omega$ .
- El valor de  $V_R$ .
- El valor de  $X$ ,  $I_X$  y el tipo de carga.
- La potencia aparente y el FP del generador  $3\phi$ .

**Solución:**

a) Teniendo que  $V_{CB} = 173,2 \angle 0^\circ \text{ V}$  y usando el triángulo de voltajes se tiene que:

$$V_{CB} = -V_{BC} \quad \text{y} \quad V_{AC} = -V_{CA}$$

$$\boxed{V_{AC} = 173,2 \angle -120^\circ \text{ V}}$$

b) Teniendo que:  $V_{AN} = \frac{173,2}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ \text{ V}$

Por divisor de tensión se halla el voltaje en la resistencia de  $10 \Omega$

$$V_{(R-10\Omega)} = \frac{10 \Omega}{(10 - j8,391) \Omega} \cdot 100 \angle -90^\circ \text{ V} = 76,6 \angle -50^\circ \text{ V}$$

Teniendo que:  $P = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R}$  se halla la potencia en la resistencia de  $10 \Omega$ :

$$P_{(R-10\Omega)} = \frac{(76,6 \text{ V})^2}{10 \Omega} \Rightarrow \boxed{P_{(R-10\Omega)} = 586,77 \text{ W}}$$

c) Teniendo que  $I_A = I_A \angle \theta_{IA}$  donde el ángulo  $\theta_{IA} = -50^\circ$ . De la lectura de vatímetro se tiene que  $W=0$  luego:

$$P_W = |V_R| |I_A| \cos(\theta_{VR} - \theta_{IA}) = 0$$

Para que esto se cumpla entonces:  $\cos \theta_Z = 0 \Rightarrow \theta_Z = 90^\circ$

Luego:  $\theta_{VR} - \theta_{IA} = 90^\circ \Rightarrow \theta_{VR} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$

Ahora bien,

$$V_R + V_X = V_{CB} \Rightarrow V_R \angle 40^\circ + V_X \angle \theta_X = 173,2 \angle 0^\circ$$

Haciendo un diagrama fasorial se obtiene la figura de la derecha. Nótese que la corriente  $I_X$  está en fase con el voltaje  $V_R$  y adelanta  $90^\circ$  al voltaje  $V_X$ .

Teniendo que:  $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

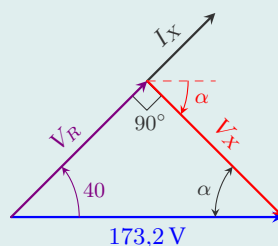
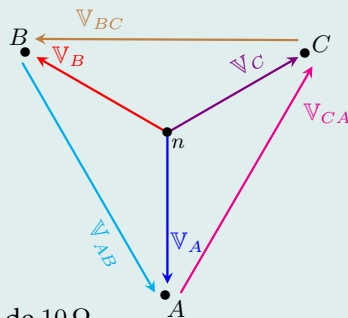
Por la ley del seno se llega a que:

$$\frac{\sin 90^\circ}{173,2 \text{ V}} = \frac{\sin 50^\circ}{V_R} \Rightarrow V_R = 132,67 \text{ V}$$

Luego:  $\boxed{V_R = 132,67 \angle 40^\circ \text{ V}}$

d) Del diagrama fasorial se puede notar que la carga es de tipo capacitiva, igualmente por ley de senos se tiene que:

$$\frac{\sin 90^\circ}{173,2 \text{ V}} = \frac{\sin 40^\circ}{V_X} \Rightarrow V_X = 111,331 \text{ V}$$



Como  $V_R = 2\Omega \cdot I_X$  se llega a que:

$$2\Omega \cdot I_X + V_X = V_{CB} \implies I_X = \frac{V_{CB} - V_X}{2\Omega}$$

Luego:

$$I_X = \frac{(173,2 \angle 0^\circ - 111,331 \angle -50^\circ) \text{ V}}{2\Omega} \implies \boxed{I_X = 66,34 \angle 40^\circ \text{ A}}$$

Hallando el valor de X:

$$X = \frac{V_X}{I_X} = \frac{111,331 \angle -50^\circ \text{ V}}{66,34 \angle 40^\circ \text{ A}} \implies \boxed{X = -j1,6782 \Omega}$$

d) Teniendo que:  $S_{3\phi} = V_A \cdot I_A^* + V_B \cdot I_B^* + V_C \cdot I_C^*$

$$\text{Donde: } I_A = \frac{100 \angle -90^\circ \text{ V}}{(10 - j8,391) \Omega} = 7,66 \angle -50^\circ \text{ A}$$

$$I_B = -I_X = 66,34 \angle -140^\circ \text{ A} \quad \text{e} \quad I_C = I_X = 66,34 \angle 40^\circ \text{ A}$$

Luego:

$$S_{3\phi} = (100 \angle -90^\circ \text{ V})(7,66 \angle -50^\circ \text{ A})^* + (100 \angle 150^\circ \text{ V})(66,34 \angle -140^\circ \text{ A})^* + (100 \angle 30^\circ \text{ V})(66,34 \angle 40^\circ \text{ A})^*$$

$$\text{Finalmente, } \boxed{S_{3\phi} = 12,23 \angle -40^\circ \text{ kVA}}$$

El factor de potencia del generador es:

$$FP_g = \cos(-40^\circ) \implies \boxed{FP_g = 0,766 \uparrow}$$

## 3.9. Redes trifásicas que actúan como secuencímetros

Para conocer la secuencia de fases de un sistema trifásico existen varias formas<sup>2</sup>; en nuestro caso se verán dos circuitos eléctricos que ayudan a identificar la secuencia del sistema trifásico de una forma analítica.

### 3.9.1. Circuito RC

<sup>2</sup>Visitar [http://www3.fi.mdp.edu.ar/electrica/archivos/secuencia\\_fases.pdf](http://www3.fi.mdp.edu.ar/electrica/archivos/secuencia_fases.pdf) para conocerlas.

Se debe cumplir que:

$$\boxed{X_C = R}$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_{AC}}{R - jX_C} = \frac{\mathbb{V}_{AC}}{R - jR} = \frac{\mathbb{V}_{AC}}{R(1 - j)}$$

**Cuando el sistema 3 $\phi$  es de secuencia positiva**

$$\mathbb{V}_{AB} = V_L \angle 0^\circ ; \quad \mathbb{V}_{BC} = V_L \angle -120^\circ$$

$$\mathbb{V}_{CA} = V_L \angle 120^\circ$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_{AC}}{R(1 - j)} = \frac{-(V_L \angle 120^\circ)}{\sqrt{2} R \angle -45^\circ} = \frac{V_L \angle -60^\circ}{\sqrt{2} R \angle -45^\circ}$$

$$\mathbb{I} = \frac{V_L}{\sqrt{2} R} \angle -15^\circ$$

Luego:

$$\mathbb{V}_{An'} = R \mathbb{I} = \cancel{R} \frac{V_L}{\sqrt{2} \cancel{R}} \angle -15^\circ \implies \mathbb{V}_{An'} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ$$

También:

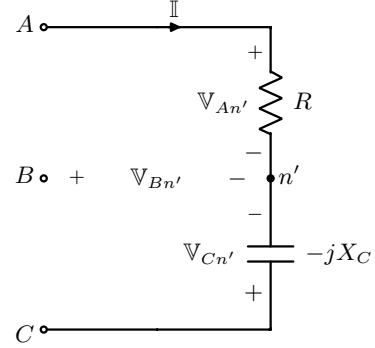
$$\mathbb{V}_{Cn'} = -jX_C (-\mathbb{I}) = R \angle 90^\circ \cdot \frac{V_L}{\sqrt{2} R} \angle -15^\circ \implies \mathbb{V}_{Cn'} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle 75^\circ$$

Teniendo que:

$$\mathbb{V}_{Bn'} = \mathbb{V}_{An'} - \mathbb{V}_{AB} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ - V_L \angle 0^\circ = V_L \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -15^\circ - 1 \angle 0^\circ \right)$$

Llegando a que:  $\mathbb{V}_{An'} = 0,37 V_L \angle -150^\circ$

Finalmente, cuando  $\boxed{|\mathbb{V}_{An'}| < V_L}$  la secuencia del sistema 3 $\phi$  es **positiva** sec(+).



**Figura 3.25.** Circuito RC que actúa como secuencímetro

**Cuando el sistema 3 $\phi$  es de secuencia negativa**

$$\mathbb{V}_{AB} = V_L \angle 0^\circ ; \quad \mathbb{V}_{BC} = V_L \angle 120^\circ ; \quad \mathbb{V}_{CA} = V_L \angle -120^\circ$$

$$\mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_{AC}}{R(1 - j)} = \frac{-(V_L \angle -120^\circ)}{\sqrt{2} R \angle -45^\circ} = \frac{V_L \angle 60^\circ}{\sqrt{2} R \angle -45^\circ} \implies \mathbb{I} = \frac{V_L}{\sqrt{2} R} \angle 105^\circ$$

Luego:

$$\mathbb{V}_{An'} = R \mathbb{I} = \cancel{R} \frac{V_L}{\sqrt{2} \cancel{R}} \angle 105^\circ \implies \mathbb{V}_{An'} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle 105^\circ$$

También:

$$\mathbb{V}_{Cn'} = -jX_C (-\mathbb{I}) = R \angle 90^\circ \cdot \frac{V_L}{\sqrt{2} R} \angle 105^\circ \implies \mathbb{V}_{Cn'} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle -165^\circ$$

Teniendo que:

$$\mathbb{V}_{Bn'} = \mathbb{V}_{An'} - \mathbb{V}_{AB} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} \angle 105^\circ - V_L \angle 0^\circ = V_L \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 105^\circ - 1 \angle 0^\circ \right)$$

Llegando a que:  $\mathbb{V}_{An'} = 1,37 V_L \angle 150^\circ$

Finalmente, cuando  $|\mathbb{V}_{An'}| > V_L$  la secuencia del sistema  $3\phi$  es **negativa** sec(-).

### 3.9.2. Circuito RCR

Se debe cumplir que:

$$R = X_C$$

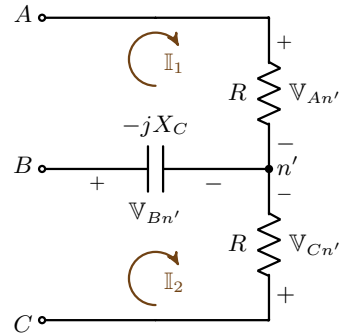
La idea es determinar los voltajes  $\mathbb{V}_{An'}$ ,  $\mathbb{V}_{Bn'}$  y  $\mathbb{V}_{Cn'}$ , para después hacer una comparación entre ellos. Se utiliza el método de las corrientes de malla.

$$\mathbb{V}_{AB} = R \mathbb{I}_1 - jX_C (\mathbb{I}_1 - \mathbb{I}_2)$$

$$\mathbb{V}_{BC} = R \mathbb{I}_2 - jX_C (\mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1)$$

En forma matricial (cuando  $X_C = R$ ):

$$R \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}_{AB} \\ \mathbb{V}_{BC} \end{bmatrix}$$



**Figura 3.26.** Circuito RCR que actúa como secuencímetro

**Cuando el sistema  $3\phi$  es de secuencia positiva**

$$\mathbb{V}_{AB} = V_L \angle 0 \quad ; \quad \mathbb{V}_{BC} = V_L \angle -120 \quad ; \quad \mathbb{V}_{CA} = V_L \angle 120$$

$$R \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = V_L \begin{bmatrix} 1 \angle 0 \\ 1 \angle -120 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{V_L}{R} \begin{bmatrix} 0,23 \angle -11,56 \\ 0,86 \angle -71,57 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\mathbb{V}_{An'} = R \mathbb{I}_1 = 0,23 V_L \angle -11,56$$

$$\mathbb{V}_{Bn'} = -jR (\mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1) = 0,77 V_L \angle -176,53$$

$$\mathbb{V}_{Cn'} = -R \mathbb{I}_2 = 0,86 V_L \angle 108,43$$

Finalmente, cuando  $|\mathbb{V}_{Cn'}| > |\mathbb{V}_{An'}|$  la secuencia del sistema  $3\phi$  es **positiva** sec(+).

### Cuando el sistema 3 $\phi$ es de secuencia negativa

$$\mathbb{V}_{AB} = V_L \angle 0^\circ \quad ; \quad \mathbb{V}_{BC} = V_L \angle 120^\circ \quad ; \quad \mathbb{V}_{CA} = V_L \angle -120^\circ$$

$$R \begin{bmatrix} 1-j & j \\ j & 1-j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = V_L \begin{bmatrix} 1 \angle 0^\circ \\ 1 \angle 120^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{V_L}{R} \begin{bmatrix} 0,86 \angle 48,43^\circ \\ 0,23 \angle 108,43^\circ \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\mathbb{V}_{An'} = R \mathbb{I}_1 = 0,86 V_L \angle 48,43^\circ$$

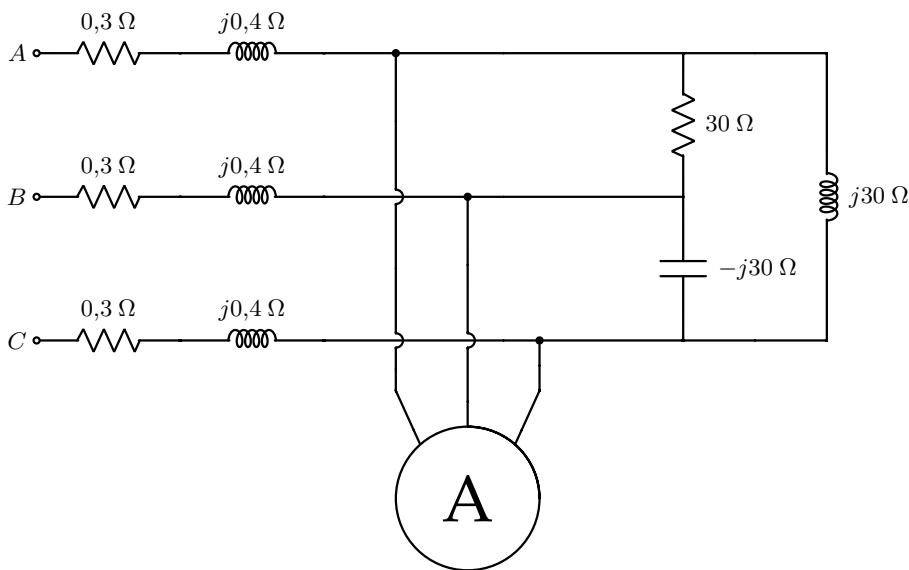
$$\mathbb{V}_{Bn'} = -jR(\mathbb{I}_2 - \mathbb{I}_1) = 0,77 V_L \angle 123,46^\circ$$

$$\mathbb{V}_{Cn'} = -R \mathbb{I}_2 = 0,23 V_L \angle -71,57^\circ$$

Finalmente, cuando  $|\mathbb{V}_{Cn'}| < |\mathbb{V}_{An'}|$  la secuencia del sistema 3 $\phi$  es **negativa** sec(-).

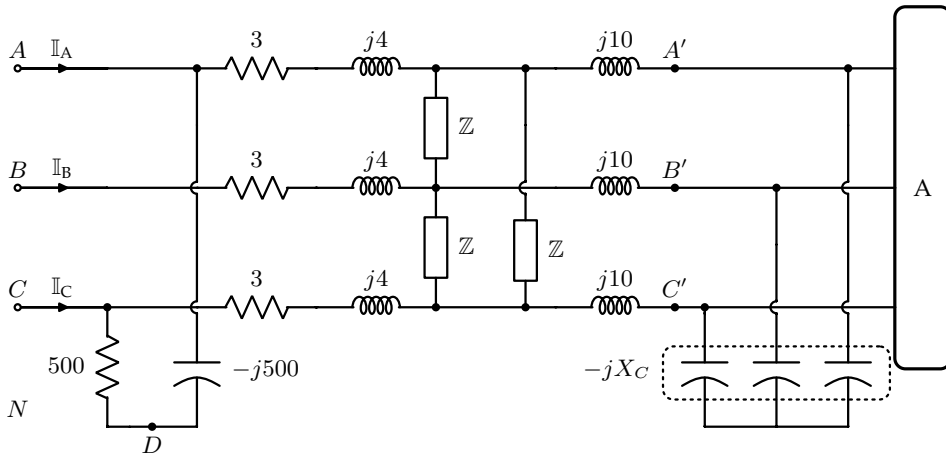
## 3.10. Ejercicios propuestos

1. En el circuito de la siguiente figura, A es una carga trifásica equilibrada cuya placa característica dice 6 kVA, 400 V, FP 0,866 en atraso. La fuente trifásica tiene  $\mathbb{V}_{AB} = 400 \angle 0^\circ$  V y  $\mathbb{V}_{CB} = 350 \angle -90^\circ$  V. Hallar la potencia activa de la carga A y el FP del generador indicando si es en atraso o en adelanto.



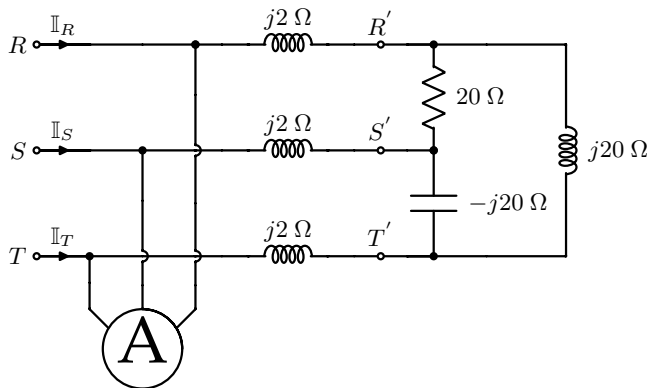
Respuesta:  $P_A = 5864,43$  W;  $FP_g = 0,986 \downarrow$

2. En el circuito de la siguiente figura, A es una carga trifásica equilibrada, FP en atraso, 450 kW, 360 kVar. La potencia del banco de condensadores en estrella, es de 150 kVA.  $Z = 800 \angle 30^\circ$ ,  $V_{C'A'} = 13,2 \angle 0^\circ$  kV. Hallar: a)  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$ , FP del generador. b)  $V_{DN}$ . c) Si los condensadores se conectan en delta, hallar  $V_{A'B'}$ , FP del generador. Suponga que  $f = 60$  Hz y que la fuente trifásica es ideal.



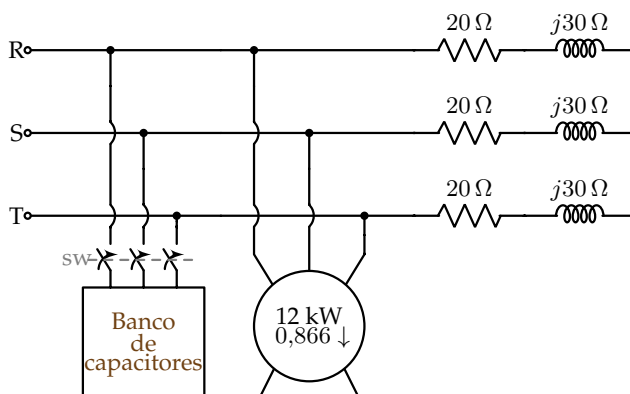
Respuesta: a)  $I_A = 50,7 \angle -177^\circ$  A;  $I_B = 49,6 \angle 85,4^\circ$  A;  $I_C = 66,1 \angle -45,13^\circ$  A;  $FP_g = 0,95 \downarrow$ . b)  $V_{DN} = 29085 \angle -147,78^\circ$  V. c)  $V_{A'B'} = 13513,2 \angle -120^\circ$  V;  $FP_g = 0,99 \downarrow$ .

3. En el circuito de la siguiente figura, A es una carga trifásica equilibrada de fp 0,866 en adelante y 12 kW. La fuente trifásica tiene  $V_{RT} = 440 \angle 0^\circ$  V,  $V_{RS} = 440 \angle -60^\circ$  V. Hallar: a)  $I_R$ ,  $I_S$ ,  $I_T$ . b) Factor de potencia del generador. c)  $V_{R'S'}$ .



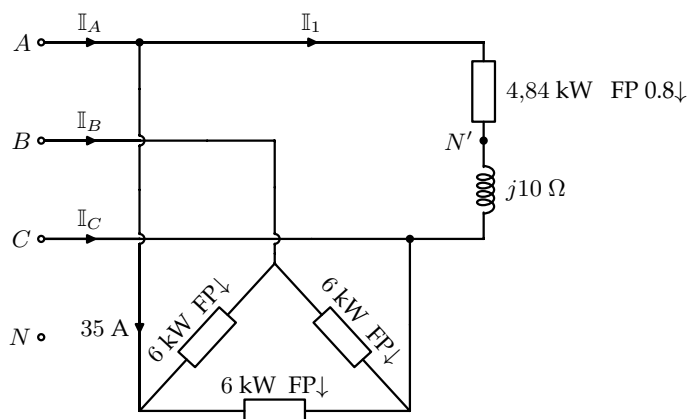
Respuesta: a)  $I_R = 46,23 \angle -59,8^\circ$  A;  $I_S = 63,8 \angle 124,84^\circ$  A;  $I_T = 18,11 \angle -43,22^\circ$  A. b)  $FP_g = 0,9429 \uparrow$ . c)  $V_{R'S'} = 450,87 \angle -81,47^\circ$  V.

4. El circuito de la figura, la fuente trifásica de secuencia negativa (-) tiene un voltaje de línea de  $V_L = 440$  V. Tomando como referencia a  $\mathbb{V}_{RN} = V_f \angle 0$  (Asuma  $C = 40 \mu\text{F}$  en el banco de capacitores).
- a) Hallar la potencia aparente de la fuente trifásica y el factor de potencia; con sw abierto. b) Calcular el FP de la fuente  $3\phi$  cuando sw está cerrado y el banco se conecta en Y. c) Repetir el punto b cuando el banco se conecta en  $\Delta$ .



Respuesta: a)  $S_g = 18,75$  kVA;  $\text{FP}_g = 0,796 \downarrow$  b)  $S_g = 17,144$  kVA;  $\text{FP}_g = 0,87 \downarrow$   
c)  $S_g = 15,157$  kVA;  $\text{FP}_g = 0,985 \downarrow$

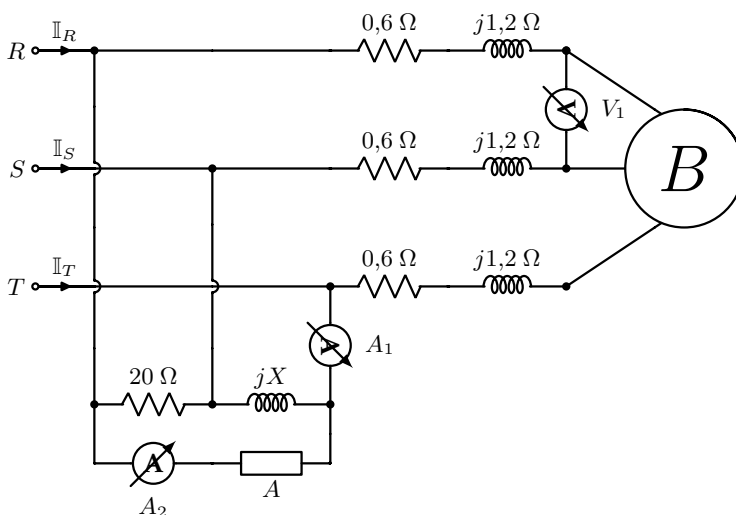
5. En el circuito trifásico de la figura,  $\mathbb{V}_{AC} = 440 \angle 0^\circ$  V, secuencia +,  $f = 60$  Hz. Hallar: a)  $\mathbb{I}_1$ . b)  $\mathbb{I}_A$ ,  $\mathbb{I}_B$ ,  $\mathbb{I}_C$ . c)  $\mathbb{V}_{NN'}$ . d) Los  $\mu\text{F}$  de cada condensador de un banco  $3\phi$  conectado en  $\Delta$  en paralelo con la fuente, que corrija el FP del generador a 0,9  $\downarrow$ .



Respuesta: a)  $\mathbb{I}_1 = 24,6 \angle -63,43^\circ$  A; b)  $\mathbb{I}_A = 55,11 \angle -36,49^\circ$  A;  $\mathbb{I}_B = 35 \angle -137,93^\circ$  A;  $\mathbb{I}_C = 59,13 \angle 108,04^\circ$  A; c)  $\mathbb{V}_{NN'} = 237,02 \angle 89,96^\circ$  V; d)  $C = 7,13 \mu\text{F}$



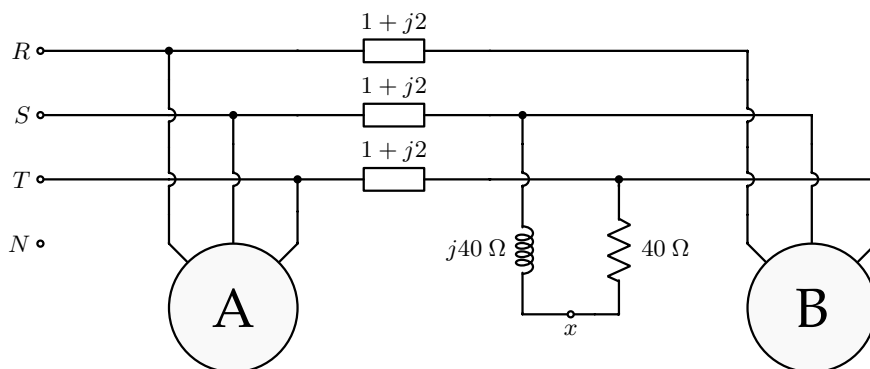
6. En el circuito de la siguiente figura, el amperímetro  $A_1$  marca 8,9 A, el amperímetro  $A_2$  marca 2,2 A. La carga  $A$  tiene  $FP = 0,707$  en adelante, la carga  $B$  es una carga  $3\phi$  equilibrada de 1,239 kVA. El voltímetro  $V_1$  marca 203,5 V. La fuente de alimentación  $3\phi$  tiene  $V_{SR} = -j207,8$  V sec. +. Para cada una de las siguientes preguntas, marque la respuesta correcta.



- a) El factor de potencia del generador es:  
☐ 0,95 ↓      ☐ 0,87 ↓      ☐ 0,95 ↑      ☐ 0,87 ↑
- b) La potencia activa trifásica de  $B$  es:  
☐ 1,23 kW      ☐ 0,77 kW      ☐ -1,23 kW      ☐ -0,77 kW
- c) El valor de  $X$  es:  
☐ 8,8 Ω      ☐ 28,8 Ω      ☐ 18,8 Ω      ☐ 1,8 Ω
- d) El ángulo de fase de  $I_T$  es:  
☐ -79,5 °      ☐ 66,21 °      ☐ -66,21 °      ☐ 79,5 °
- e) La potencia reactiva de la carga  $A$  es:  
☐ 323,2 VAr      ☐ 123,2 VAr      ☐ -123,2 VAr      ☐ -323,2 VAr
- f) La magnitud de  $I_R$  es:  
☐ 20,37 A      ☐ 6,5 A      ☐ 15,6 A      ☐ 2,03 A
- g) La potencia aparente del generador es:  
☐ -4,298 kVA      ☐ 2,298 kVA      ☐ 4,298 kVA      ☐ -2,298 kVA
- h) El ángulo de fase de la corriente por el amperímetro 1 es:  
☐ -75 °      ☐ 56,31 °      ☐ 75 °      ☐ -56,31 °

Respuesta: a) 0,87 ↓; b) 1,23 kW; c) 18,8 Ω; d) 79,5°; e) -323,2 VAr; f) 15,6 A; g) 4,298 kVA; h) 56,31°

7. Datos:  $V_{RN} = j254$  V (valor rms), secuencia positiva.  
Calcular: a) Los kW consumidos por la carga B. b) El factor de potencia de la fuente trifásica. c)  $V_{xN}$ .

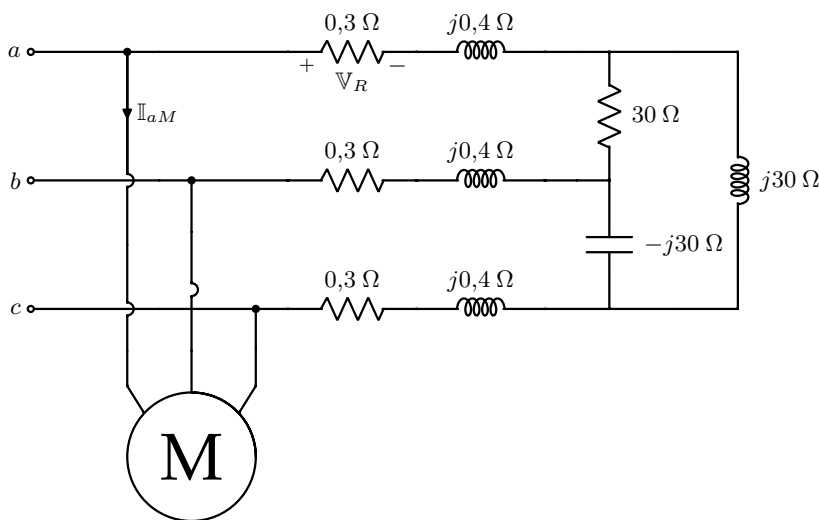


A: Carga 3 $\phi$  balanceada, 12 kVA  
FP de 0.866 adelante

B: Carga 3 $\phi$  formada por tres impedancias en  $\Delta$  cada una de  $48\angle 60^\circ \Omega$

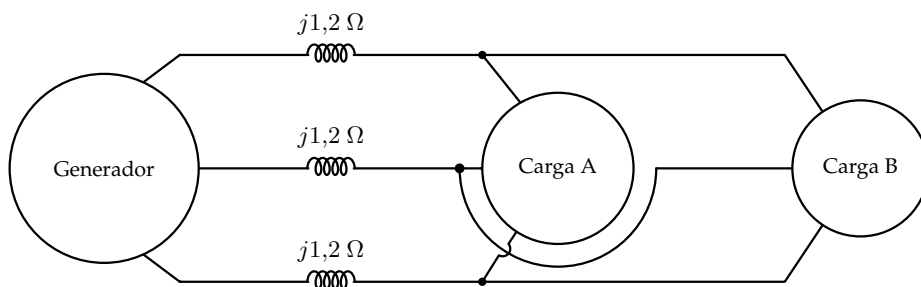
Respuesta: a) 4366 W; b) 0.96 en atraso; c)  $287,16\angle -92,56^\circ$

8. En el circuito de la siguiente figura, M es un motor trifásico de 4 hp, eficiencia de 90 % y FP 0,866 en atraso. La fuente trifásica tiene  $V_{ab} = 440V\angle 0^\circ$  y la secuencia es negativa. Hallar: a) La corriente  $I_{aM}$  en magnitud y ángulo. b) El voltaje  $V_R$  en magnitud y ángulo. c) El FP del generador indicando si es en atraso o en adelante.



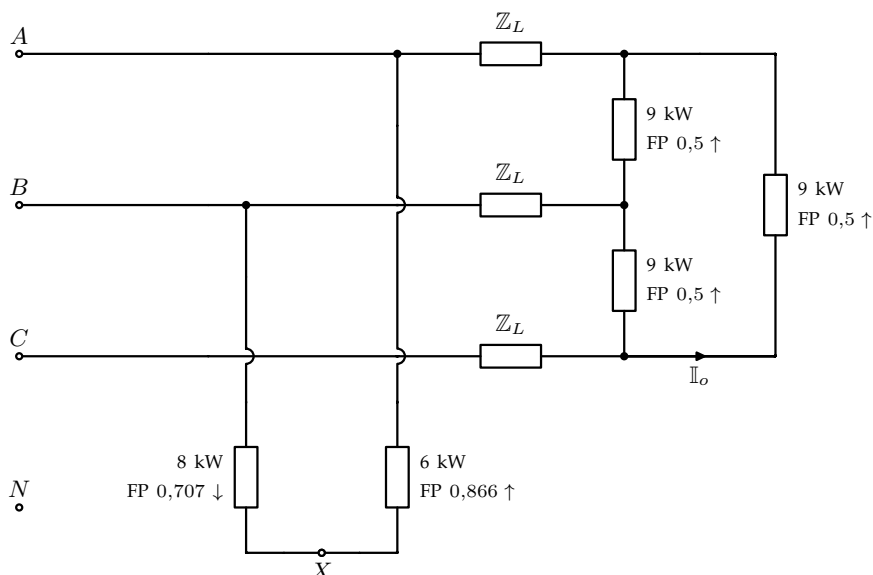
Respuesta: a)  $I_{aM} = 5,02\angle 0^\circ$  A; b)  $V_R = 2,145\angle 103,22^\circ$  V; c) FP = 0,983  $\downarrow$

9. El sistema dado es equilibrado. El voltaje RMS en terminales del generador es 208 V y su secuencia es RST. El generador recibe 4.5 kVAR. La carga A es de factor de potencia en adelanto y su potencia reactiva es de 10 kVAR. La carga B es de 2.55 kW con factor de potencia de 0,5 en atraso. Calcular: **a)** El voltaje (magnitud) en terminales de la carga B; **b)** El factor de potencia del generador, indicando si es en atraso o adelanto.



Respuesta: **a)** 235.14 V; **b)** 0.6939 ↑.

10. La fuente es equilibrada de secuencia ACB,  $\mathbb{I}_o = 40\text{A} \angle 120^\circ$  y  $\mathbb{Z}_L = (0,4 + j1,2)\Omega$ . Calcule: **a)** La potencia compleja  $\mathbb{S}$  del generador; **b)** El voltaje  $\mathbb{V}_{XN}$  (magnitud y ángulo).



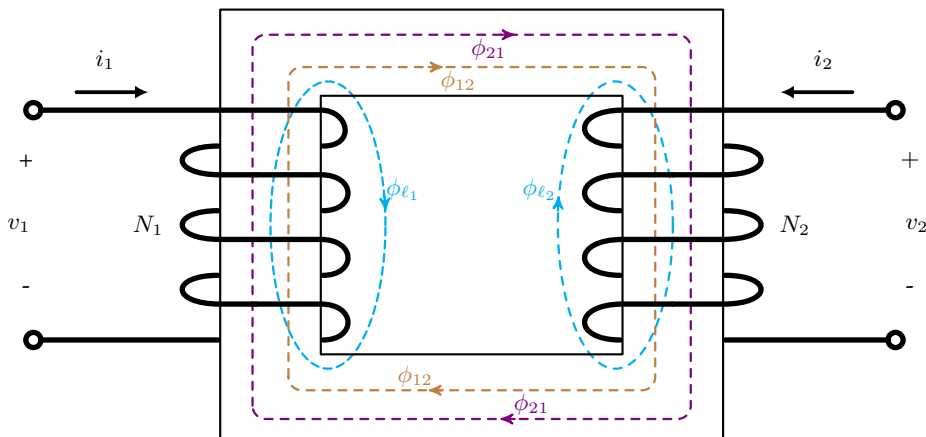
Respuesta: **a)** 53kVA  $\angle -28,08^\circ$ ; **b)** 389,74  $\angle 4,92^\circ$ .



# 4

## Circuitos magnéticos y transformadores

Cuando dos mallas con o sin contacto entre ellas se afectan mutuamente por medio del campo magnético generado por una de ellas, se dice que están *acopladas magnéticamente*. El transformador es un dispositivo eléctrico diseñado con base en el concepto del acoplamiento magnético. Se sirve de bobinas magnéticamente acopladas para transferir energía de un circuito a otro. Los transformadores son elementos clave de circuitos. Se usan en sistemas eléctricos para aumentar o reducir tensiones o corrientes alternas [3].



**Figura 4.1.** Modelo del transformador

Del transformador de la figura 4.1, el núcleo que contiene las bobinas es hecho de un

material ferromagnético (por ejemplo acero al silicio), su permeabilidad<sup>1</sup> magnética  $\mu$  es constante y generalmente tiene valores altos; esto permite el paso de un flujo magnético a través de él que produce un voltaje inducido de una bobina a otra.

De la figura 4.1 se pueden observar los siguientes parámetros:

- $N_1, N_2$  : Número espiras del devanado primario y secundario respectivamente, del transformador.
- $v_1, v_2$  : Voltajes primario y secundario respectivamente, del transformador.
- $i_1, i_2$  : Corrientes que entran al devanado primario y secundario respectivamente, del transformador.
- $\phi_{\ell_1}, \phi_{\ell_2}$  : Flujo de dispersión en la bobina 1 y 2 respectivamente.
- $\phi_{12}$  : Flujo de dispersión en la bobina 1 producido por  $i_2$ .
- $\phi_{21}$  : Flujo de dispersión en la bobina 2 producido por  $i_1$ .

Con los flujos señalados en la figura 4.1 se obtiene:

- $\phi_{11} = \phi_{\ell_1} + \phi_{21}$  Flujo en la bobina 1 producido por  $i_1$ .
- $\phi_{22} = \phi_{\ell_2} + \phi_{12}$  Flujo en la bobina 2 producido por  $i_2$ .
- $\phi_1 = \phi_{\ell_1} + \phi_{21} + \phi_{12} = \phi_{11} + \phi_{12}$  Flujo total de la bobina 1.
- $\phi_2 = \phi_{\ell_2} + \phi_{12} + \phi_{21} = \phi_{22} + \phi_{21}$  Flujo total de la bobina 2.

De acuerdo a la ley de Faraday<sup>2</sup>:

$$e_{ind} = N \frac{d}{dt} \phi_t$$

Donde  $N$  es el número de espiras de la bobina y  $\phi_t$  el flujo total de la bobina.

Por la ley de inducción de Faraday, si se omite la resistencia interna de las bobinas, los voltajes en sus terminales están dados por:

$$v_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} \quad ; \quad v_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt}$$

Del flujo magnético se tiene que:

$$\phi = \frac{N i}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{R}}$$

Donde:

$\mathfrak{F}$ : Es la fuerza magnetomotriz.

$\mathfrak{R}$ : Es la reluctancia del núcleo ferromagnético y sus unidades son  $\left[ \frac{\text{Ampere-vuelta}}{\text{Wb}} \right]$

<sup>1</sup>La permeabilidad magnética es la capacidad que posee un medio para atraer y hacer pasar a través de él un campo magnético.

<sup>2</sup>La formula de la ley de Faraday es:  $e_{ind} = -N \frac{d}{dt} \phi_t$ , pero en nuestro caso omitiremos el signo (-) por que conocemos el sentido de las corrientes.

La **reluctancia** de un material ferromagnético está dada por:  $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu A}$  donde  $\ell$  es la longitud de la trayectoria del material,  $A$  es el área de la sección transversal y  $\mu$  es la permeabilidad del material. La reluctancia es análoga a la resistencia y es la medida de la dificultad que tiene el flujo magnético para fluir en un circuito magnético [5].

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \left( \frac{N_1}{\mathcal{R}_{\ell_1}} + \frac{N_1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) i_1 + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \\ \phi_2 &= \left( \frac{N_2}{\mathcal{R}_{\ell_2}} + \frac{N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) i_2 + \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}v_1 &= N_1 \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{N_1}{\mathcal{R}_{\ell_1}} + \frac{N_1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) i_1 + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right] \\ v_2 &= N_2 \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{N_2}{\mathcal{R}_{\ell_2}} + \frac{N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) i_2 + \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right]\end{aligned}$$

Llegando a:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{\ell_1}} + \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) & \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \\ \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} & \left( \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{\ell_2}} + \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Otra forma de obtener el modelo circuital sería la siguiente:

Se definen los enlaces de flujo ( $\lambda$ ) en las bobinas como:

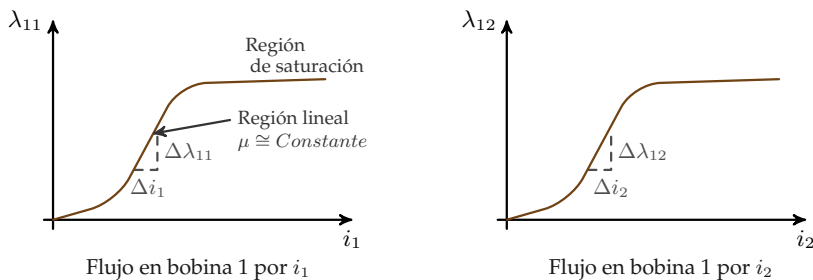
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= N_1 \phi_1 & \lambda_2 &= N_2 \phi_2 \\ \lambda_1 &= N_1 \phi_{11} + N_1 \phi_{12} & \lambda_2 &= N_2 \phi_{22} + N_2 \phi_{21} \\ \lambda_1 &= \lambda_{11} + \lambda_{12} & \lambda_2 &= \lambda_{22} + \lambda_{21}\end{aligned}$$

Expresando en función de  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{d}{dt} \lambda_1 & v_2 &= \frac{d}{dt} \lambda_2 \\ v_1 &= \frac{d}{dt} \lambda_{11} + \frac{d}{dt} \lambda_{12} & v_2 &= \frac{d}{dt} \lambda_{22} + \frac{d}{dt} \lambda_{21} \\ v_1 &= \frac{d \lambda_{11}}{d i_1} \cdot \frac{d i_1}{dt} + \frac{d \lambda_{12}}{d i_2} \cdot \frac{d i_2}{dt} & v_2 &= \frac{d \lambda_{22}}{d i_2} \cdot \frac{d i_2}{dt} + \frac{d \lambda_{21}}{d i_1} \cdot \frac{d i_1}{dt}\end{aligned}$$

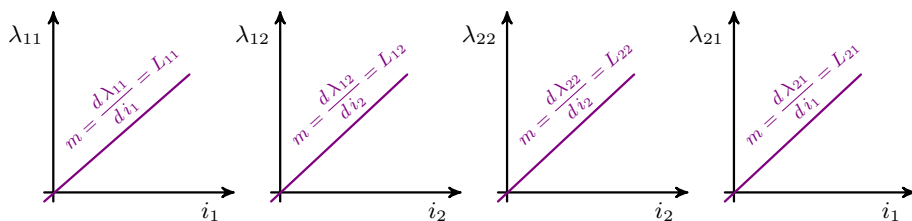
Debemos relacionar los flujos con las corrientes del transformador. De las propiedades magnéticas del núcleo; usando la ley de Ampere<sup>3</sup> se llega a la gráfica de la figura 4.2.

<sup>3</sup>  $\oint \mathbf{B} d\ell = \mu i_{\text{encerrada}}$



**Figura 4.2.** Relación entre corriente y flujo magnético

Suponiendo una relación lineal entre  $\lambda$  e  $i$  se tiene:



**Figura 4.3.** Relación lineal entre los enlaces de flujo ( $\lambda$ ) y la corriente en las bobinas

Ahora bien, reemplazando lo obtenido de las figuras anteriores en las ecuaciones de los voltajes se tiene:

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \quad ; \quad v_2 = L_{22} \frac{di_2}{dt} + L_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$L_{11}$ : Autoinductancia de la bobina 1

$$\frac{d\lambda_{11}}{di_1} = N_1^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) = L_1$$

$L_{12}$ : Autoinductancia entre bobinas 1 y 2 (Inductancia mutua)

$$\frac{d\lambda_{12}}{di_2} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} = M$$

$L_{22}$ : Autoinductancia de la bobina 2

$$\frac{d\lambda_{22}}{di_2} = N_2^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_2}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} \right) = L_2$$

$L_{21}$ : Autoinductancia entre bobinas 2 y 1 (Inductancia mutua)

$$\frac{d\lambda_{21}}{di_1} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} = M$$



Los devanados de las bobinas poseen una pequeña resistencia interna la cual se desprecia para el análisis del transformador, teniendo que:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de acople}} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_1 \\ \frac{d}{dt} i_2 \end{bmatrix}$$

## 4.1. Ecuación fundamental de las máquinas de corriente alterna

Representando el flujo que pasa por el solenoide en el dominio del tiempo se tiene:

$$\phi(t) = \phi_{max} \sin(\omega t)$$

Donde  $\phi_{max}$  es el valor pico del flujo que produce el solenoide.

Teniendo que:  $v(t) = N \frac{d}{dt} \phi(t)$

Se tiene:

$$v(t) = N \phi_{max} \omega \cos \omega t = V_{max} \cos \omega t$$

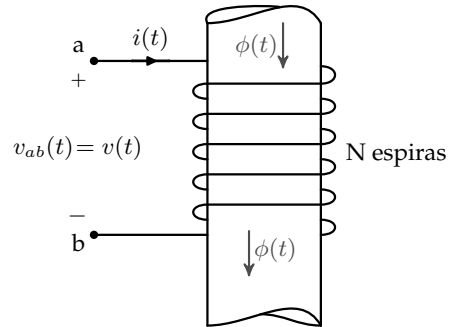
Donde  $V_{max}$  es el valor pico del voltaje aplicado al solenoide.

Siendo  $V_{RMS} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$

Se obtiene:

$$V_{RMS} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N f \phi_{max} \xrightarrow{4,44} \boxed{V_{RMS} = 4,44 N f \phi_{max}}$$

Donde  $f$  es la frecuencia de la fuente que alimenta el solenoide.



**Figura 4.4.** Flujo magnético por un solenoide debido a una corriente  $i(t)$

## 4.2. Circuito equivalente de dos o más inductancias acopladas

Teniendo en cuenta las resistencias de las bobinas:

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_1 + e_{ind1} \\ v_2 &= R_2 i_1 + e_{ind2} \end{aligned}$$

Donde:  $R_1$ : Resistencia interna de la bobina 1.  
 $R_2$ : Resistencia interna de la bobina 2.

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ L_2 & M \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

En el dominio de la frecuencia se tiene:

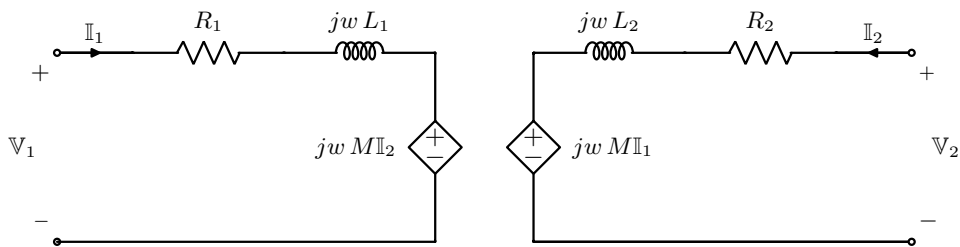
$$\mathbb{V}_1 = R_1 \mathbb{I}_1 + \mathbb{E}_{ind1} = R_1 \mathbb{I}_1 + j\omega L_1 \mathbb{I}_1 + j\omega M \mathbb{I}_2$$

$$\mathbb{V}_2 = R_2 \mathbb{I}_2 + \mathbb{E}_{ind2} = R_2 \mathbb{I}_2 + j\omega L_2 \mathbb{I}_2 + j\omega M \mathbb{I}_1$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_1 \\ \mathbb{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

De lo anterior se obtiene el siguiente circuito equivalente:



**Figura 4.5.** Circuito equivalente de dos inductancias acopladas usando fuentes dependientes

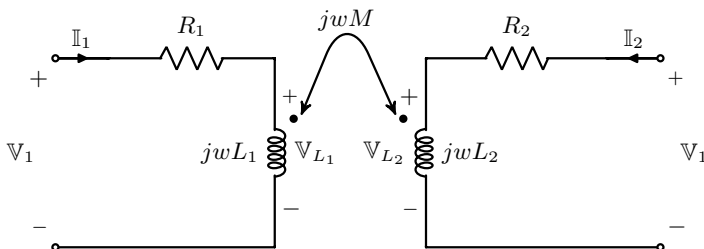
Del circuito se tiene que:

$$X_1 = \omega L_1 \Omega \quad \mapsto \quad \text{Reactancia inductiva propia de la bobina 1.}$$

$$X_2 = \omega L_2 \Omega \quad \mapsto \quad \text{Reactancia inductiva propia de la bobina 2.}$$

$$X_M = \omega M \Omega \quad \mapsto \quad \text{Reactancia mutua entre las bobinas 1 y 2.}$$

Para simplificar el circuito de la figura 4.5 se utiliza el concepto de marcas de polaridad llegando al siguiente circuito equivalente:



**Figura 4.6.** Circuito equivalente de dos inductancias acopladas usando marcas de polaridad

### 4.2.1. Obtención de las marcas de polaridad

#### Coeficiente de acople

Si gran parte del flujo producido en una bobina se enlaza con el de una segunda bobina se dice que las bobinas están estrechamente acopladas, mientras que si sólo es una pequeña cantidad enlazada, las bobinas están ligeramente acopladas. Se puede demostrar que para dos bobinas de auto-inductancia  $L_1$  y  $L_2$  colocadas tal que la inductancia mutua entre ellas sea  $M$ , entonces:

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Donde  $k$  se denomina el coeficiente de acoplamiento. Si  $k \rightarrow 1$  las bobinas están aproximadamente acopladas mientras que si  $k \rightarrow 0$ , las bobinas están ligeramente acopladas. Si dos bobinas son puestas con sus ejes magnéticos en ángulo recto entre sí, entonces no hay acoplamiento magnético entre ellas y  $k$  es virtualmente cero [5].

Para nuestro caso se tiene que:

$$k = \sqrt{k_{12}k_{21}} \quad \text{donde} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad \begin{cases} 1 & \text{Acople perfecto} \\ 0 & \text{No hay acople} \end{cases}$$

Siendo:  $k_{12} = \frac{\phi_{12}}{\phi_2}$  ,  $k_{21} = \frac{\phi_{21}}{\phi_1}$

Analizando  $k_{12}$ :

$$k_{12} = \frac{\phi_{12}}{\phi_2} = \frac{\frac{d\phi_{12}}{dt}}{\frac{d\phi_2}{dt}} = \frac{N_1 * N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt}}{N_1 * N_2 \frac{d\phi_2}{dt}} = \frac{N_2 \frac{d}{dt}(N_1 \phi_{12})}{N_1 \frac{d}{dt}(N_2 \phi_2)} = \frac{N_2 \frac{d}{dt} \lambda_{12}}{N_1 \frac{d}{dt} \lambda_2} = \frac{N_2 \frac{d}{dt} \lambda_{12} \frac{di_2}{dt}}{N_1 \frac{d}{dt} \lambda_2 \frac{di_2}{dt}}$$

Llegando a que:

$$k_{12} = \frac{N_2 \cdot M_{12}}{N_1 \cdot L_2}$$

Igualmente se puede llegar a:

$$k_{21} = \frac{N_1 \cdot M_{21}}{N_2 \cdot L_1}$$

Ahora bien:

$$k = \sqrt{k_{12}k_{21}} = \sqrt{\frac{N_2 M_{12}}{N_1 L_2} \cdot \frac{N_1 M_{21}}{N_2 L_1}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \implies \boxed{M = k\sqrt{L_1 L_2}}$$

Donde el valor de  $k$  se encuentra entre 0 y 1 ( $0 \leq k \leq 1$ ). En el apéndice A.4 se muestra otra forma de obtener los valores de las inductancias utilizando el coeficiente de acople.

#### Obtención de las marcas de polaridad

Para obtener las marcas de polaridad del transformador se siguen los siguientes pasos:

1. Se asume una corriente en cualquiera de las dos bobinas.
2. Se pone una marca por donde entra la corriente asumida en el paso 1.
3. Se determina el flujo de la corriente asumida y se asume este flujo en aumento ( $\frac{d\phi}{dt} > 0$ , el flujo se encuentra en aumento).
4. En la otra bobina se determina la corriente inducida  $i_{ind}$  que se opone al flujo existente (ley de Lenz).
5. La marca se coloca por donde sale la corriente inducida  $i_{ind}$ .

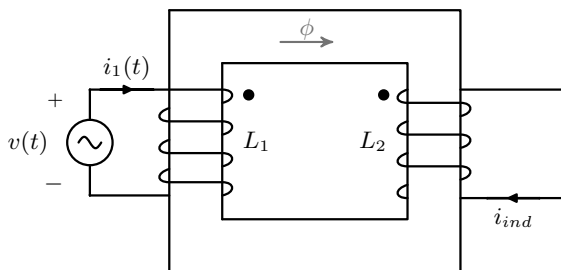


Figura 4.7. Obtención de las marcas de polaridad

Nótese de la figura 4.7, que la corriente inducida  $i_{ind}$  en la bobina 2 se obtiene por la regla de la mano derecha, tomando el flujo de la bobina 2 opuesto al flujo producido por la bobina 1 obteniendo así la dirección de la corriente  $i_{ind}$ .

Cuando las marcas de ambas bobinas están en el lado donde entran o salen las corrientes el signo de acople es (+) y cuando las marcas se intercambian (por ejemplo en la bobina 1 está donde entra la corriente y en la bobina 2 donde sale) el signo de acople es (-).

Ahora bien con lo anterior se puede describir el circuito de la figura (4.6) así:

$$\mathbb{V}_1 = R_1 \mathbb{I}_1 + \mathbb{V}_{L_1}$$

$$\mathbb{V}_2 = R_2 \mathbb{I}_2 + \mathbb{V}_{L_2}$$

Donde  $\mathbb{V}_{L_1}$  y  $\mathbb{V}_{L_2}$  se obtiene de la matriz de acople:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_{L_1} \\ \mathbb{V}_{L_2} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} wL_1 & +wM \\ +wM & wL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

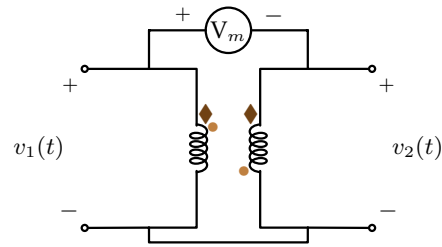
El signo de acople es + ya que ambas corrientes entran por el terminal marcado.

### Obtención de las marcas de polaridad sin conocer el sentido de arrollamiento de los devanados

Cuando se tiene un transformador y se quieren conocer las marcas se pueden hacer las siguientes pruebas:

*Prueba en corriente alterna:*

Se pone un voltímetro entre dos terminales del transformador y los otros terminales se cortocircuitan, además se alimenta con un voltaje ac por el primario como se observa en la figura.

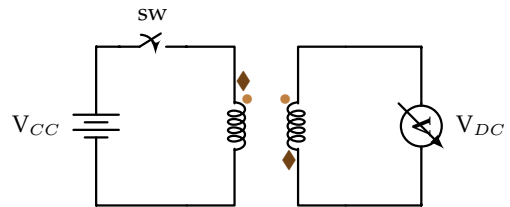


**Figura 4.8.** Prueba en corriente alterna

- Si  $V_m > V_1 \mapsto$  se encuentran las marcas cruzadas (conexión aditiva) [•]
- Si  $V_m < V_1 \mapsto$  se encuentran las marcas enfrentadas (conexión sustractiva) [♦]

*Prueba en corriente continua:*

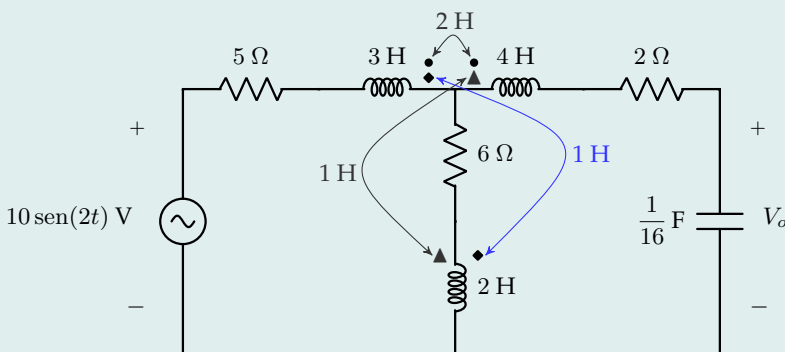
Se alimenta el primario con una fuente de corriente directa y se asume la marca en el terminal que se encuentra a mayor potencial. En el secundario se conecta un galvanómetro como se observa en la figura.



**Figura 4.9.** Prueba en corriente continua

- Si el galvanómetro se defleca hacia la derecha, las marcas se encuentran enfrentadas [•]
- Si el galvanómetro se defleca hacia la izquierda, las marcas se encuentran cruzadas [♦]

**Ejemplo 4.1:** Del circuito de la figura, determinar  $v_0(t)$  en régimen permanente, usando el método de corrientes de malla.



**Solución:**

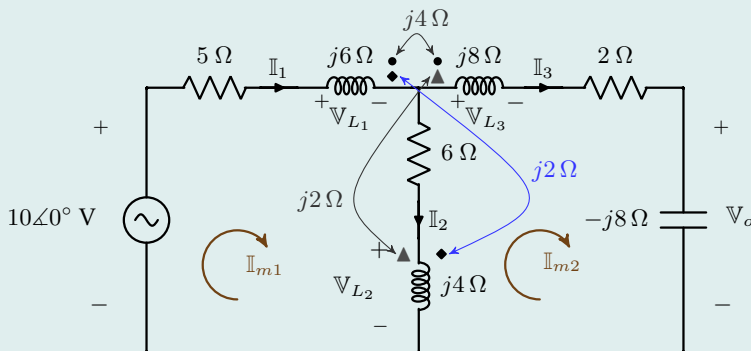


Figura 4.10. Circuito en el dominio de la frecuencia

De las inductancias acopladas se obtiene la *matriz de acople*:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_{L_1} \\ \mathbb{V}_{L_2} \\ \mathbb{V}_{L_3} \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 \\ \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

Planteando las corrientes de circuito como corrientes de malla se tiene:

$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_{m1} \quad ; \quad \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2} \quad ; \quad \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_{m2}$$

Para la malla 1

$$\begin{aligned} \sum \mathbb{V}_{m1} = 0 \quad \Rightarrow \quad & -10\angle 0^\circ + 5\mathbb{I}_{m1} + j[6\mathbb{I}_{m1} - 2(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) - 4\mathbb{I}_{m2}] + 6(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) \\ & + j[-2\mathbb{I}_{m1} + 4(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) + 2\mathbb{I}_{m2}] = 0 \\ (11 + j6)\mathbb{I}_{m1} - (6 + j4)\mathbb{I}_{m2} &= 10\angle 0^\circ \end{aligned}$$

Para la malla 2

$$\begin{aligned} \sum \mathbb{V}_{m2} = 0 \quad \Rightarrow \quad & -j4\mathbb{I}_{m1} + j2(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) + j8\mathbb{I}_{m2} + (2 - j8)\mathbb{I}_{m2} + j2\mathbb{I}_{m1} \\ & - j4(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) - j2\mathbb{I}_{m2} + 6(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m1}) = 0 \\ -(6 + j4)\mathbb{I}_{m1} + 8\mathbb{I}_{m2} &= 0 \end{aligned}$$

En forma matricial se tiene:

$$\begin{bmatrix} 11 + j6 & -6 - j4 \\ -6 - j4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Llegando a que:

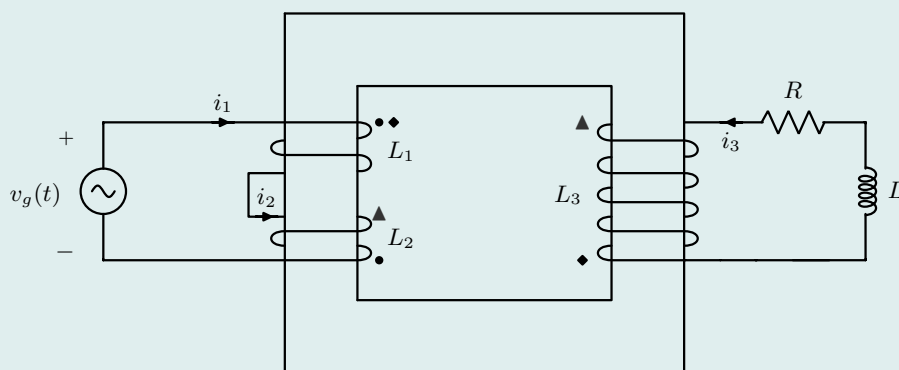
$$\mathbb{I}_{m1} = 1,1765\angle 0^\circ \text{ A} \quad ; \quad \mathbb{I}_{m2} = 1,0605\angle 33,69^\circ \text{ A}$$

Luego:  $\mathbb{V}_o = -j8\mathbb{I}_{m2} = 8,48\angle -56,31^\circ \text{ V}$

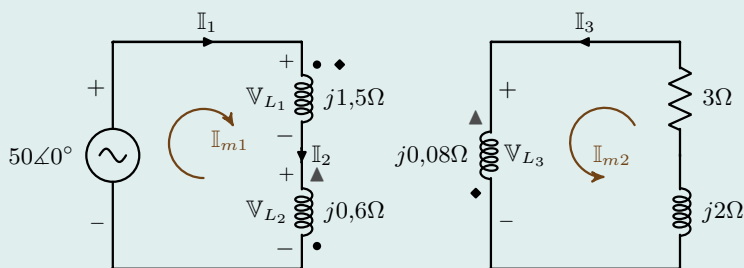
$$v_o(t) = 8,48 \sin(2t - 56,31^\circ)$$

**Ejemplo 4.2** Para el transformador de la figura se tiene que:

$v_g(t) = 50 \cos(1000t)$  V ;  $L_1 = 1,5$  mH ;  $L_2 = 0,6$  mH ;  $L_3 = 0,08$  mH ;  $L = 2$  mH ;  
 $R = 3\Omega$  ;  $k_{12} = 0,9$  ;  $k_{13} = 0,8$  ;  $k_{23} = 0,6$ . Hallar la potencia media en la resistencia  $R$ .



**Solución:** Representando el transformador en forma circuital y aplicándole el método fasorial se tiene:



Del acople de las inductancias se tiene:

$$M_{12} = k_{12} \sqrt{L_1 L_2} = 0,9 \sqrt{1,5 \text{ mH} \cdot 0,6 \text{ mH}} = 0,85 \text{ mH}$$

$$M_{13} = k_{13} \sqrt{L_1 L_3} = 0,8 \sqrt{1,5 \text{ mH} \cdot 0,08 \text{ mH}} = 0,28 \text{ mH}$$

$$M_{23} = k_{23} \sqrt{L_2 L_3} = 0,6 \sqrt{0,6 \text{ mH} \cdot 0,08 \text{ mH}} = 0,13 \text{ mH}$$

$$X_{12} = X_{21} = \omega M_{12} = 0,85 \Omega \quad [\bullet]$$

$$X_{13} = X_{31} = \omega M_{13} = 0,28 \Omega \quad [\diamond]$$

$$X_{23} = X_{32} = wM_{23} = 0,13 \, \Omega \quad [\blacktriangle]$$

Obteniendo la matriz de acople:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}_{L_1} \\ \mathbb{V}_{L_2} \\ \mathbb{V}_{L_2} \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} 1,5 & -0,85 & -0,28 \\ -0,85 & 0,6 & 0,13 \\ -0,28 & 0,13 & 0,08 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix}$$

Aplicando mallas se tiene:

$$\begin{aligned} j\mathbb{I}_{m1} [1,5 - 0,85 - 0,85 + 0,6] + j\mathbb{I}_{m3} [-0,28 + 0,13] &= 50 \angle 0^\circ \\ j\mathbb{I}_{m1} [-0,28 + 0,13] + j\mathbb{I}_{m3} [0,08 + 2] + 3\mathbb{I}_{m3} &= 0 \end{aligned}$$

Solucionando el anterior sistema de ecuaciones de manera matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j0,4 & -j0,15 \\ -j0,15 & 3 + j2,08 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 126,1 \angle -89,27^\circ \\ 5,18 \angle -34^\circ \end{bmatrix}$$

Hallando la potencia de la resistencia:

$$P_R = I_3^2 \cdot R = \left( \frac{5,18}{\sqrt{2}} \, \text{A} \right)^2 \cdot 3 \, \Omega \implies \boxed{P_R = 40,2 \, \text{W}}$$

### 4.3. El transformador ideal

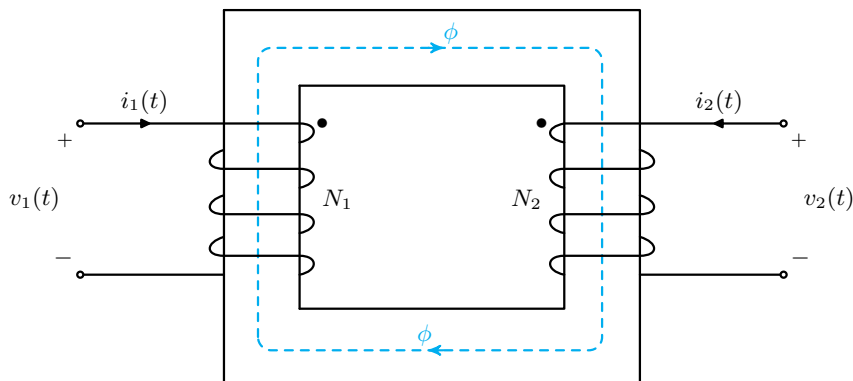


Figura 4.11. Representación del transformador



Para un transformador como el de la figura 4.11 donde el núcleo es de un material ferromagnético y cuya reluctancia es  $\mathcal{R}_{núcleo}$ , para tomarse como ideal se asumen los siguientes puntos:

- Las resistencias internas de las bobinas se desprecian (no se considera calentamiento por efecto Joule en las bobinas).
- La permeabilidad magnética del núcleo es infinita.  $\mu \rightarrow \infty$
- El acople entre bobinas es perfecto.
- Si  $k=1$  entonces, no existen flujos de dispersión  $\phi_{\ell_1} = 0$  ,  $\phi_{\ell_2} = 0$
- Si  $\mu \rightarrow \infty$  entonces las auto-inductancias de las bobinas  $L_1$  y  $L_2$  serán:

Recordemos que: 
$$L_1 = N_1^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \right)$$

Debido a que  $\phi_{\ell_1} = 0$ ,  $\mathcal{R}_{\ell_1}$  no se considera  $\Rightarrow L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}_{núcleo}}$

Recordemos que: 
$$\mathcal{R}_{núcleo} = \frac{\ell_m}{\mu A}$$

$\ell_m$ : Longitud media del núcleo.

Donde:  $A$ : Área de la sección transversal del núcleo.

$\mu$ : Permeabilidad magnética del núcleo.

Teniendo que:  $\mu \rightarrow \infty$  ;  $\mathcal{R}_{núcleo} = 0$  ;  $\boxed{L_1 \rightarrow \infty}$

De manera similar para  $L_2$ : 
$$L_2 = N_2^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell_2}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \right)$$

Debido a que  $\phi_{\ell_2} = 0$ ,  $\mathcal{R}_{\ell_2}$  no se considera  $\Rightarrow L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}_{núcleo}}$

Teniendo que:  $\mu \rightarrow \infty$  ;  $\mathcal{R}_{núcleo} = 0$  ;  $\boxed{L_2 \rightarrow \infty}$

### 4.3.1. Relación de voltajes y corrientes en el transformador ideal

**Relación de voltajes:**

Debido a que  $R_1 = 0$  y  $R_2 = 0$

$$v_1 = N_1 \frac{d}{dt} \phi \quad ; \quad v_2 = N_2 \frac{d}{dt} \phi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_1}{N_1} \quad ; \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{v_2}{N_2}$$

Llegando a:

$$\frac{v_1}{N_1} = \frac{v_2}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

La relación de voltajes obtenida se da cuando las polaridades positivas de  $v_1$  y  $v_2$  coinciden con las marcas de polaridad.

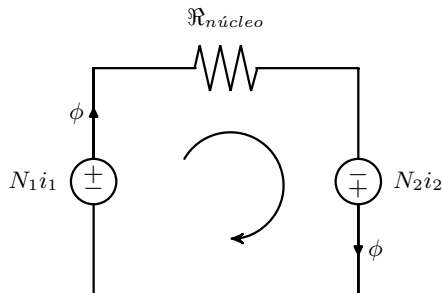
**Relación de corrientes:**

Se utiliza un circuito eléctrico equivalente de las dos bobinas enrolladas en el núcleo.

Teniendo que en un transformador ideal  $\mathcal{R}_{núcleo} = 0$

Luego:

$$N_1 i_1 = -N_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}}$$



**Figura 4.12.** Circuito eléctrico equivalente del núcleo del transformador

La relación de corrientes obtenida se da cuando ambas corrientes entran por el terminal marcado.

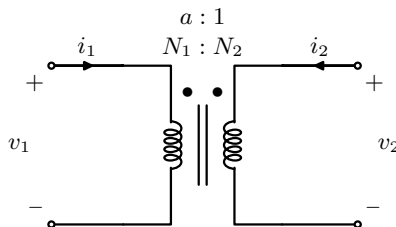
**4.3.2. Circuito equivalente del transformador ideal**

Se define  $a$  como la relación de vueltas del transformador:

$$\boxed{a = \frac{N_1}{N_2}}$$

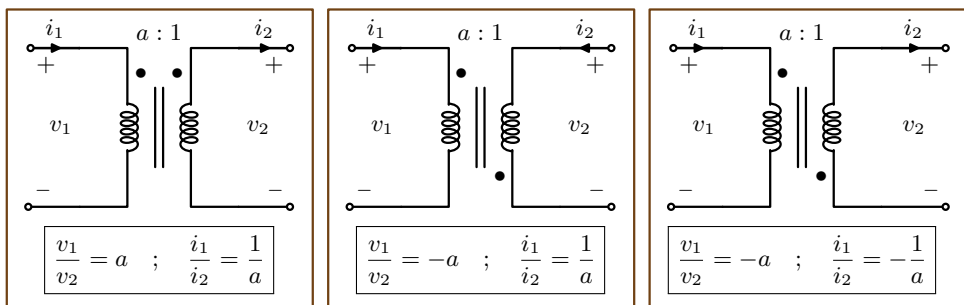
Teniendo que:

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = a} \quad ; \quad \boxed{\frac{i_1}{i_2} = -\frac{1}{a}}$$



**Figura 4.13.** Símbolo del transformador ideal

Para otros casos del transformador se tiene que:



**Figura 4.14.** Otros casos del transformador

## 4.3.3. Devanados primario y secundario

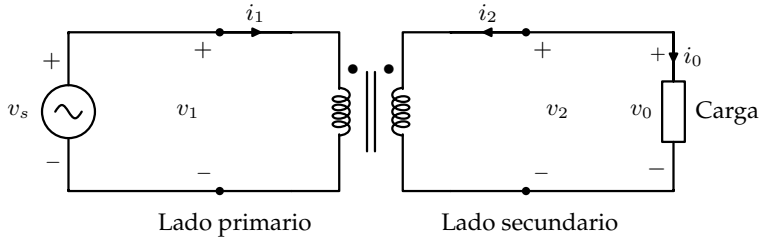


Figura 4.15. Modelo del transformador con carga

Se acostumbra a denotar el devanado primario del transformador, el devanado donde se conecta la fuente y el devanado secundario donde se conecta la carga.

Nótese que:

Sí  $a > 1$  ( $N_1 > N_2$ ) entonces  $v_1 > v_2 \rightarrow$  Transformador reductor  
 además  $i_1 < i_2$   
 Sí  $a < 1$  ( $N_2 > N_1$ ) entonces  $v_2 > v_1 \rightarrow$  Transformador elevador  
 además  $i_1 > i_2$

En un transformador ideal no existen pérdidas de potencia ( $\eta = 100\%$ )

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \cdot 100\%$$

Donde (en régimen permanente sinusoidal):

$$P_{ent} = V_s I_1 \cos(\theta_{V_s} - \theta_{I_1}) \text{ W}$$

$$P_{sal} = V_0 I_0 \cos(\theta_{V_0} - \theta_{I_0}) \text{ W}$$

En un transformador ideal como el de la figura 4.15:

$$\frac{V_s}{V_0} = \frac{V_1}{V_2} = a$$

Donde:  $V_s = V_s \angle \theta_{V_s}$  y  $V_0 = V_0 \angle \theta_{V_0}$

Entonces:  $V_s \angle \theta_{V_s} = a(V_0 \angle \theta_{V_0})$   
 $V_s = aV_0 \Rightarrow \boxed{\theta_{V_s} = \theta_{V_0}}$

El transformador ideal no afecta los ángulos de fase de los voltajes.

Para las corrientes se tiene:  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{a}$

Donde:  $I_1 = I_1 \angle \theta_{I_1}$  e  $I_0 = I_0 \angle \theta_{I_0}$

Entonces:  $I_1 \angle \theta_{I_1} = \frac{1}{a}(I_0 \angle \theta_{I_0})$   
 $I_1 = \frac{1}{a}I_0 \Rightarrow \boxed{\theta_{I_1} = \theta_{I_0}}$

El transformador ideal no afecta los ángulos de fase de las corrientes.

Ahora bien:

$$P_{ent} = V_s I_1 \cos(\theta_{V_s} - \theta_{I_1}) = a V_0 \cdot \frac{1}{a} I_0 \cos(\theta_{V_0} - \theta_{I_0}) = P_{sal}$$

Llegando a que en el transformador ideal la potencia útil se conserva ( $P_{ent} = P_{sal}$ ).

Finalmente:

$$\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \cdot 100\% \implies \boxed{\eta = 100\%}$$

#### 4.3.4. Propiedad de escala de un transformador ideal

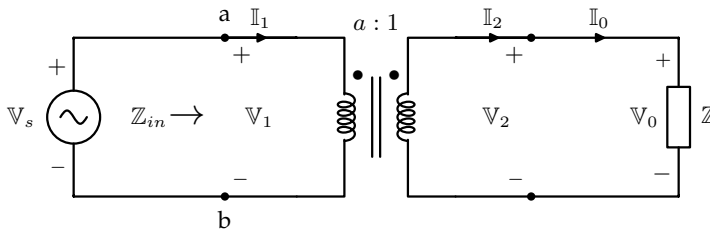


Figura 4.16. Propiedad de escala

En el transformador ideal:

$$\frac{V_1}{V_2} = a \quad ; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a}$$

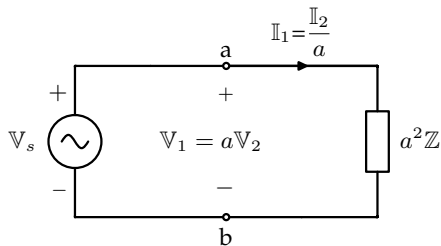
Nos interesa determinar la impedancia *vista* en las terminales ab:

$$Z_{in} \triangleq \frac{V_1}{I_1} = \frac{a V_2}{\frac{1}{a} I_2} = a^2 \frac{V_2}{I_2}$$

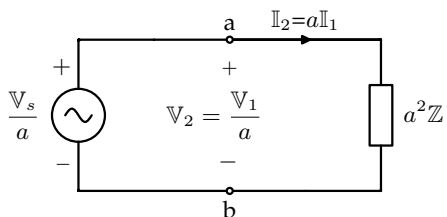
Teniendo que:

$$\boxed{Z_{in} = a^2 Z} \implies \boxed{Z = \frac{Z_{in}}{a^2}}$$

Se puede reemplazar el circuito de la figura 4.16 por un circuito equivalente (sin el transformador ideal) como se muestra a continuación:



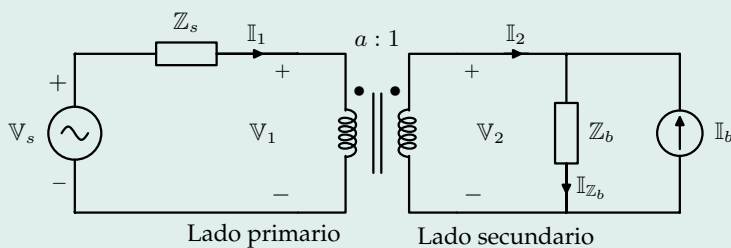
Refiriendo la impedancia del lado secundario al lado primario del transformador.



Refiriendo la fuente de voltaje del lado primario al lado secundario del transformador.

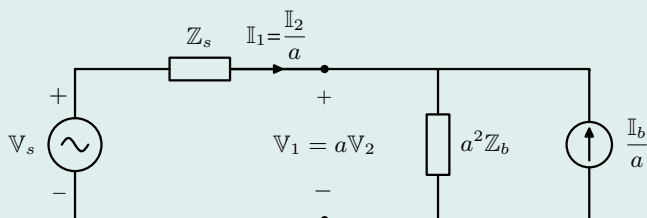
**Ejemplo 4.3** En el circuito de la figura:

- Referir los elementos del lado secundario al lado primario.
- Referir los elementos del lado primario al lado secundario.



**Solución:**

$$\text{a) } \frac{V_1}{V_2} = a \quad ; \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{a}$$

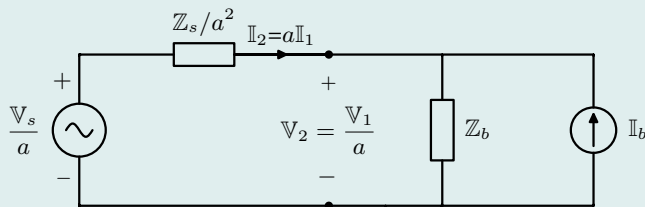


En el lado secundario del transformador:

$$I_2 = I_{Z_b} - I_b = \frac{V_2}{Z_b} - I_b \implies a I_1 = \frac{V_1}{a} \frac{1}{Z_b} - I_b$$

$$\text{Teniendo que: } I_1 = \frac{V_1}{a^2 Z_b} - \frac{I_b}{a}$$

**b)**



En el lado primario del transformador:

$$V_s = Z_s I_1 + V_1 = Z_s \frac{I_2}{a} + a V_2$$

Teniendo que:  $\frac{V_s}{a} = \frac{Z_s}{a^2} I_2 + V_2$

## 4.4. Teorema de máxima transferencia de potencia

El teorema de la máxima transferencia de potencia establece que una fuente suministra la máxima potencia a una carga  $Z$ , cuando  $Z$  es igual a  $Z_{The}$ , la impedancia de Thévenin en las terminales de la carga [3].

Se quiere encontrar las condiciones que maximizan la potencia activa que absorbe la carga  $Z$ .

En efecto:  $P_Z = R I_0^2$

Donde:  $I_0 = \frac{V_{the}}{Z_{The} + Z}$

Luego:

$$I_0 = \frac{V_{The} \angle \theta_{V_{The}}}{(R_{The} + jX_{The}) + (R_Z + jX_Z)} = \frac{V_{The} \angle \theta_{V_{The}}}{R_{The} + R + j(X_{The} + X_Z)}$$

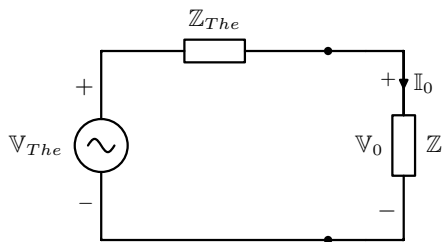
En notación polar:

$$I_0 = \frac{V_{The} \angle \theta_{V_{The}}}{\sqrt{(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X_Z)^2} \angle \tan^{-1} \left( \frac{X_{The} + X_Z}{R_{The} + R} \right)}$$

Teniendo que:

$$P_Z = \frac{R V_{The}^2}{(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X_Z)^2}$$

★ Cuando  $\frac{\partial P_Z}{\partial R} = 0$  el valor de  $R$  maximiza a  $P_Z$ .



\* Cuando  $\frac{\partial P_Z}{\partial X} = 0$  el valor de  $X$  maximiza a  $P_Z$ .

Nótese que:  $P_Z = R V_{The}^2 [(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^{-1}$

Luego:

$$\frac{\partial P_Z}{\partial R} = V_{The}^2 [(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^{-1} - R V_{The}^2 [(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^{-2} \cdot (2)(R_{The} + R) = 0$$

Sabiendo que:  $V_{The} \neq 0$

$$\frac{\partial P_Z}{\partial R} = \frac{1}{(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2} - \frac{2R(R_{The} + R)}{[(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^2} = 0$$

Despejando  $R$  se tiene:  $R = \sqrt{R_{The}^2 + (X_{The} + X)^2}$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_Z}{\partial X} &= -R V_{The}^2 [(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^{-2} \cdot 2(X_{The} + X) = 0 \\ &= \frac{-2 V_{The}^2 R (X_{The} + X)}{[(R_{The} + R)^2 + (X_{The} + X)^2]^2} = 0 \end{aligned}$$

De lo anterior, la potencia  $P_Z$  se maximiza cuando:

$$R = R_{The} \quad \text{y} \quad X = -X_{The}$$

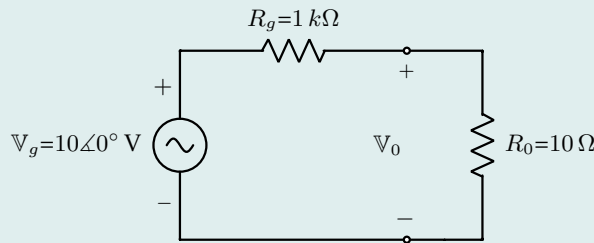
De otra forma, el valor de  $Z$  que maximiza  $P_Z$  es:

$$Z = (Z_{The})^*$$

Cuando  $X$  es fija:  $R = \sqrt{R_{The}^2 + (X + X_{The})^2}$

Cuando  $R$  es fija:  $X = -X_{The}$

**Ejemplo 4.4:** Para el circuito de la siguiente figura:



- Determinar la potencia que absorbe  $R_0$ .
- ¿De qué forma se puede maximizar la potencia absorbida por  $R_0$  manteniendo  $R_g$  en  $1 \text{ k}\Omega$  y  $R_0$  en  $10 \Omega$ ?

**Solución:**

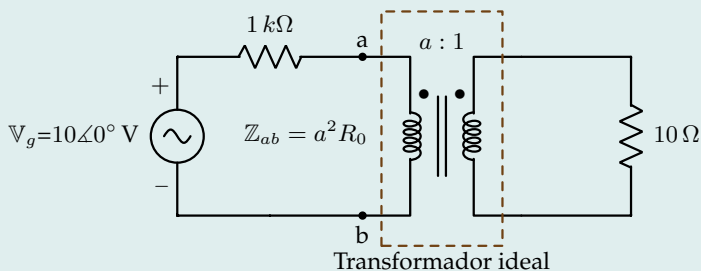
a)  $P_0 = R_0 \cdot I_0^2(rms)$

Donde  $I_0(rms) = \frac{10 \text{ V}}{R_g + R_0} = \frac{10 \text{ V}}{1010 \Omega}$

Teniendo que:

$$P_0 = \frac{10 \Omega (10 \text{ V})^2}{(1010 \Omega)^2} = 0,98 \text{ mW}$$

b) Usando un transformador ideal, que tiene relación de transformación de 10:1

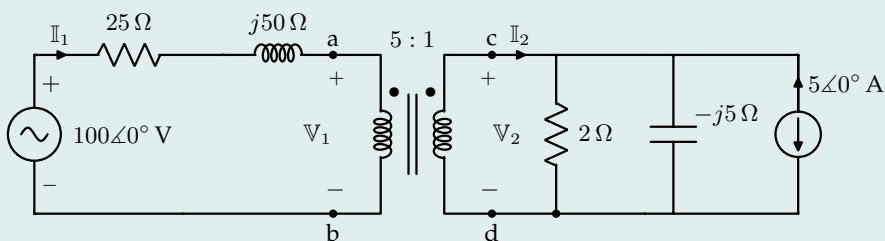


Aplicando el teorema de máxima transferencia de potencia:

$$R_g = a^2 R_0 \implies a = +\sqrt{\frac{R_g}{R_0}} = 10$$

Esto se conoce con el nombre de acople de impedancias.

**Ejemplo 4.5:** Para el circuito de la figura, determinar  $I_1$  e  $I_2$ .



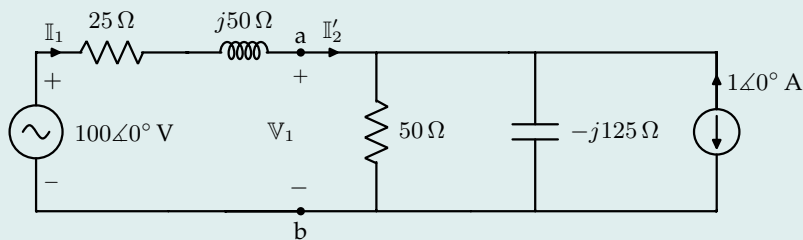
★ Refiriendo en circuito al lado de A.T (alta tensión):

$$R_{A.T} = 5^2 \cdot 2 \Omega = 50 \Omega \quad ; \quad X_{C A.T} = 5^2 \cdot -j5 \Omega = -j125 \Omega$$

$$I_{A.T} = \frac{5 \angle 0^\circ \text{ A}}{5} = 1 \angle 0^\circ \text{ A}$$

Obteniendo el siguiente circuito equivalente:





Del circuito equivalente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{V_1 - 100\angle 0^\circ \text{ V}}{(25 + j50)\Omega} + \frac{V_1}{50\Omega} + \frac{V_1}{-j125\Omega} - 1\angle 0^\circ \text{ A} = 0$$

Obteniendo así el valor de  $V_1$ :  $V_1 = 82,7\angle -25,68^\circ \text{ V}$

Para el valor de  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{100\angle 0^\circ \text{ V} - V_1}{(25 + j50)\Omega} \Rightarrow \boxed{I_1 = 0,786\angle -8,83^\circ \text{ A}}$$

Para el valor de  $I_2$ :

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{I_2 = 3,93\angle 171,17^\circ \text{ A}}$$

Se puede obtener también la potencia compleja que suministra la fuente:

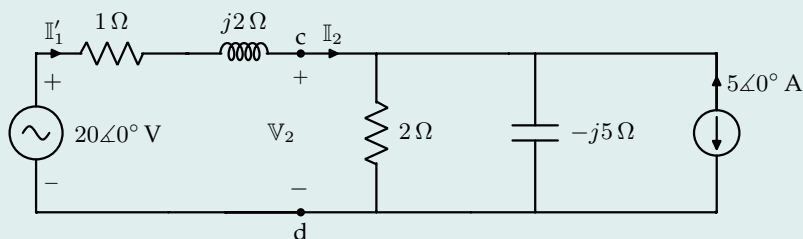
$$S = 100\angle 0^\circ \text{ V} \cdot I_1^* \Rightarrow S = 78,6\angle 8,83^\circ \text{ VA}$$

★ Refiriendo en circuito al lado de B.T (baja tensión):

$$R_{B.T} = \frac{25\Omega}{5^2} = 1\Omega \quad ; \quad X_{L.B.T} = \frac{j50\Omega}{5^2} = j2\Omega$$

$$V_{B.T} = \frac{100\angle 0^\circ \text{ V}}{5} = 20\angle 0^\circ \text{ V}$$

Obteniendo el siguiente circuito equivalente:



Del circuito equivalente se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{V_2 - 20\angle 0^\circ \text{ V}}{(1 + j2)\Omega} + \frac{V_2}{2\Omega} + \frac{V_2}{-j5\Omega} - 5\angle 0^\circ \text{ A} = 0$$

Obteniendo así el valor de  $\mathbb{V}_2$ :  $\mathbb{V}_2 = 16,54 \angle -25,68^\circ \text{ V}$

Para el valor de  $\mathbb{I}_2$ :

$$\mathbb{I}_2 = \frac{\mathbb{V}_2 - 20 \angle 0^\circ \text{ V}}{(1 + j2) \Omega} \Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_2 = 3,93 \angle 171,17^\circ \text{ A}}$$

Para el valor de  $\mathbb{I}_1$ :

$$\frac{\mathbb{I}_1}{\mathbb{I}_2} = -\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_1 = 0,786 \angle -8,83^\circ \text{ A}}$$

Obteniendo la potencia compleja que suministra la fuente:

$$\mathbb{S} = 20 \angle 0^\circ \text{ V} \cdot (\mathbb{I}_1^*) = 20 \angle 0^\circ \text{ V} \cdot (-\mathbb{I}_2)^* \Rightarrow \mathbb{S} = 78,6 \angle 8,83^\circ \text{ VA}$$

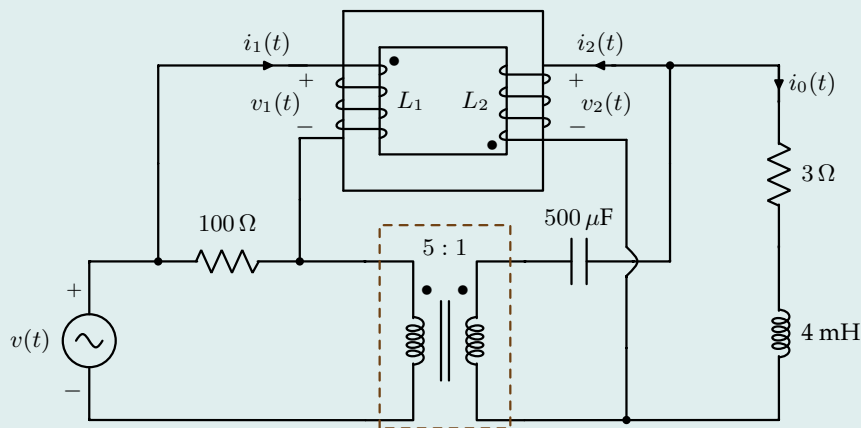
Nótese que la potencia tanto en el primario como en el secundario es la misma.

**Ejemplo 4.6:** Para el circuito de la figura se tienen los siguientes datos:

$v(t) = 220 \sin(500t - 50) \text{ V}$  ;  $L_1 = 280 \text{ mH}$  ;  $L_2 = 4 \text{ mH}$  ;  $k_{12} = 0,8$ .

Hallar:  $i_0(t)$  empleando Thévenin (pruebas separadas)

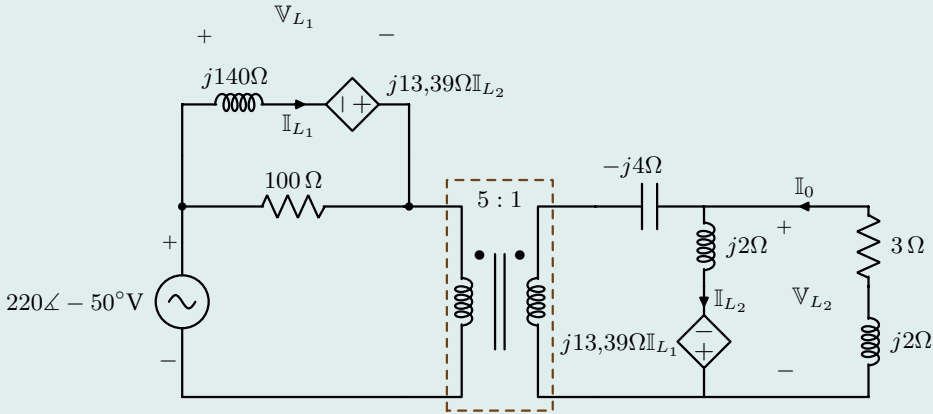
$I_N$  corriente de Norton y verificar que  $\mathbb{I}_N = \frac{\mathbb{V}_{The}}{\mathbb{Z}_{The}}$



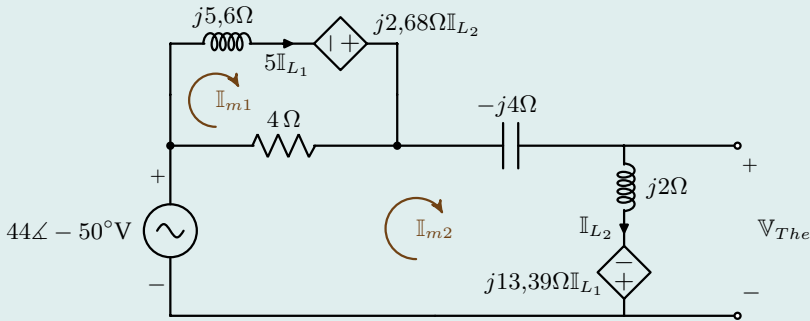
**Solución:** Transformando el circuito al dominio de  $w$ :

$w = 500 \text{ rad/s}$	$X_L = wL$	$X_C = \frac{1}{wC}$
$L = 4 \text{ mH}$	$X_L = 2 \Omega$	
$L_1 = 280 \text{ mH}$	$X_{L1} = 140 \Omega$	
$L_2 = 4 \text{ mH}$	$X_{L2} = 2 \Omega$	
$M_{12} = 0,8 \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,026 \text{ H}$	$X_{M12} = 13,39 \Omega$	
$C = 500 \mu\text{F}$		$X_C = 4 \Omega$

Representando las inductancias acopladas como fuentes dependientes se tiene:



Al referir el circuito al lado de B.T del transformador ideal y abriendo la carga para hallar  $V_{The}$  se tiene:



Calculando las corrientes de malla:

$$\sum \mathcal{V}_{m1} = 0 \Rightarrow j5,6\mathbb{I}_{m1} - j2,68\mathbb{I}_{m2} + 4(\mathbb{I}_{m1} - \mathbb{I}_{m2}) = 0$$

$$\sum \mathcal{V}_{m2} = 0 \Rightarrow -44\angle -50^\circ + 4(\mathbb{I}_{m2} - \mathbb{I}_{m1}) - j4\mathbb{I}_{m2} + j2\mathbb{I}_{m2} - j2,68\mathbb{I}_{m1} = 0$$

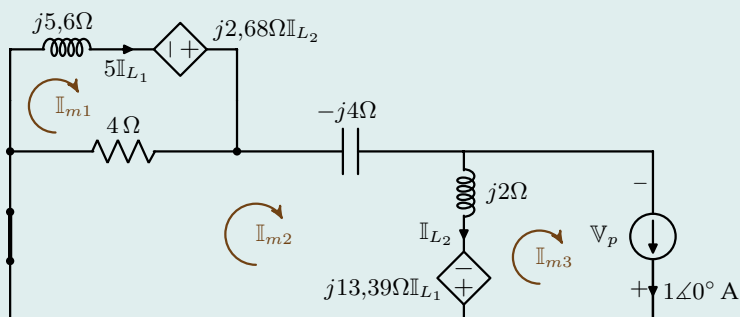
Llegando al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 4 + j5,6 & -4 - j2,68 \\ -4 - j2,68 & 4 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 44\angle 50^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{m1} \\ \mathbb{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,67\angle 4,8^\circ \text{ A} \\ 15,39\angle 25,4^\circ \text{ A} \end{bmatrix}$$

Para Hallar  $\mathcal{V}_{The}$ :

$$\mathcal{V}_{The} = j2\mathbb{I}_{m2} - (j13,39\frac{\mathbb{I}_{m1}}{5}) \Rightarrow \mathcal{V}_{The} = 10,85\angle -175,07^\circ \text{ V}$$

Calculando  $Z_{The}$ :



Calculando las corrientes de malla donde  $I_{m3} = 1\angle 0^\circ$  A se tiene:

$$\sum V_{m1} = 0 \Rightarrow j5,6I_{m1} - j2,68(I_{m2} - 1\angle 0^\circ) + 4(I_{m1} - I_{m2}) = 0$$

$$\sum V_{m2} = 0 \Rightarrow 4(I_{m2} - I_{m1}) - j4I_{m2} + j2(I_{m2} - 1\angle 0^\circ) - j2,68I_{m1} = 0$$

Llegando al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 4 + j5,6 & -4 - j2,68 \\ -4 - j2,68 & 4 - j2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j2,68 \\ 2\angle 90^\circ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,56\angle -145^\circ \text{ A} \\ 0,25\angle -125^\circ \text{ A} \end{bmatrix}$$

Para Hallar  $V_p$ :

$$V_p = -[j2(I_{m2} - 1\angle 0^\circ) - j2,68I_{m1}] \Rightarrow V_p = 1,16\angle 67,48^\circ \text{ V}$$

Obteniendo  $Z_{The}$ :

$$Z_{The} = \frac{V_p}{I_p} \Rightarrow Z_{The} = 1,16\angle 67,48^\circ \Omega$$

Calculando  $I_0$ :

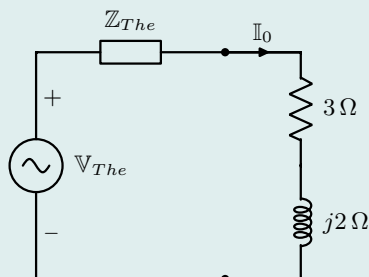
$$I_0 = \frac{10,85\angle -175,07^\circ \text{ V}}{(1,16\angle 67,48^\circ \Omega) + (3 + j2)\Omega} = 2,35\angle 143,2^\circ \text{ A}$$

En régimen permanente:

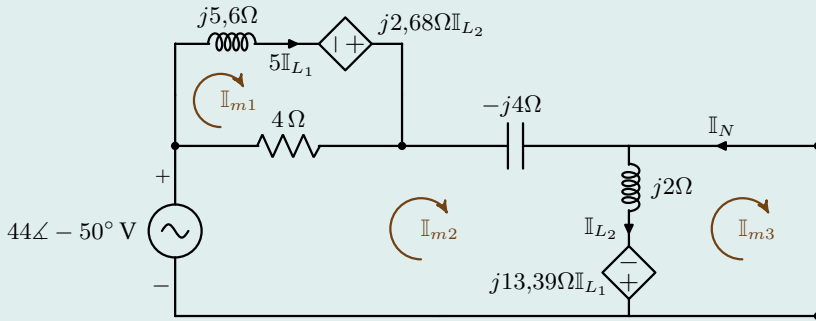
$$i_0(t) = 2,35 \sin(500t + 143,2^\circ) \text{ A}$$

Ahora se comprobará que:

$$I_N = \frac{V_{The}}{Z_{The}} = 9,35\angle 117,45^\circ \text{ A}$$



Para ello se cortocircuitarán los terminales de la carga:



Calculando las corrientes de malla:

$$\sum \mathcal{V}_{m1} = 0 \Rightarrow (4 + j5,6)\mathbb{I}_{m1} - (4 + j2,68)\mathbb{I}_{m2} + j2,68\mathbb{I}_{m3} = 0$$

$$\sum \mathcal{V}_{m2} = 0 \Rightarrow -(4 + j2,68)\mathbb{I}_{m1} - (4 - j2)\mathbb{I}_{m2} - j2\mathbb{I}_{m3} = 44\angle -50^\circ$$

$$\sum \mathcal{V}_{m3} = 0 \Rightarrow j2,68\mathbb{I}_{m1} + j2(\mathbb{I}_{m3} - \mathbb{I}_{m2}) = 0$$

De las ecuaciones del circuito se llega a que:

$$\mathbb{I}_{m3} = 9,43\angle 118,84^\circ \text{ A} \cong \mathbb{I}_N$$

## 4.5. Modelo circuital del transformador monofásico lineal

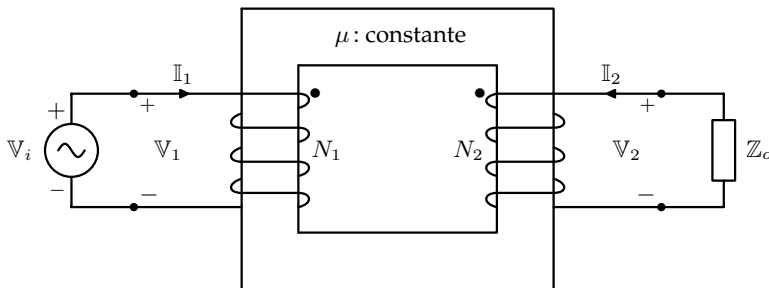


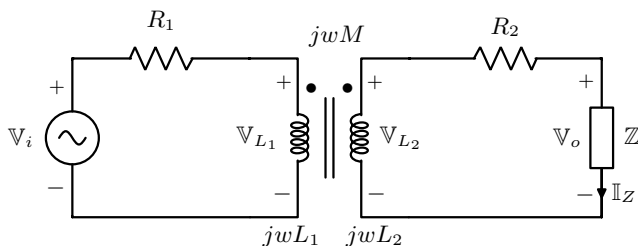
Figura 4.17. Transformador monofásico lineal

Se consideran las siguientes características:

1. Se consideran las resistencias internas de las bobinas;  $R_1, R_2 \neq 0$  (pérdidas por calentamiento en el cobre).
2.  $0 \leq k \leq 1$  (No hay acople perfecto).
3. La permeabilidad magnética del núcleo ( $\mu$ ) es constante (hay pérdidas por flujos de dispersión).
4.  $L_1, L_2 < \infty$  Las inductancias de las bobinas son infinitas.

#### 4.5.1. Cálculo de la relación de transformación ( $a$ )

Se define como:  $a = \frac{V_1}{V_2}$  donde  $V_1$ : Voltaje bobina primaria.  
 $V_2$ : Voltaje bobina secundaria.



**Figura 4.18.** Circuito equivalente del transformador monofásico lineal

Del circuito de la figura 4.18 se tiene:

$$V_1 = R_1 I_1 + jwL_1 I_1 + jwM I_2 \quad (4.1)$$

$$V_2 = R_2 I_2 + jwL_2 I_2 + jwM I_1 \quad (4.2)$$

Además:  $V_2 = Z I_Z = -Z I_2$

Teniendo que:

$$I_2 = -\frac{V_2}{Z} \quad (4.3)$$

Reemplazando la ecuación (4.3) en (4.2):

$$\begin{aligned} V_2 &= (R_2 + jwL_2) \left( -\frac{V_2}{Z} \right) + jwM I_1 \\ jwM I_1 &= V_2 + \left( \frac{R_2 + jwL_2}{Z} \right) V_2 = V_2 \left( \frac{Z}{Z} + \frac{R_2 + jwL_2}{Z} \right) \\ I_1 &= \frac{Z + R_2 + jwL_2}{Z jwM} \cdot V_2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Reemplazando la ecuación (4.4) y (4.3) en (4.1):

$$\mathbb{V}_1 = (R_1 + jwL_1) \left( \frac{\mathbb{Z} + R_2 + jwL_2}{\mathbb{Z}jwM} \right) \mathbb{V}_2 + jwM \left( -\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{Z}} \right)$$

Dividiendo en ambos lados de la ecuación entre  $\mathbb{V}_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} &= \frac{(R_1 + jwL_1)(\mathbb{Z} + R_2 + jwL_2)}{\mathbb{Z}jwM} - \frac{jwM}{\mathbb{Z}} \cdot \frac{jwM}{jwM} \\ a = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} &= \frac{(R_1 + jwL_1)(\mathbb{Z} + R_2 + jwL_2) + (wM)^2}{\mathbb{Z}jwM} \end{aligned}$$

Recordemos que en el transformador ideal:

$$a = \frac{N_1}{N_2} \quad \begin{array}{ll} N_1 : & \text{Espiras en la bobina 1.} \\ N_2 : & \text{Espiras en la bobina 2.} \end{array}$$

Teniendo en cuenta las características:

1. En un transformador ideal  $R_1 = 0$  y  $R_2 = 0$

$$a = \frac{jwL_1(\mathbb{Z} + jwL_2) + (jwM)^2}{\mathbb{Z}jwM}$$

2.  $k = 1$  (acople perfecto) ;  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$

$$a = \frac{\mathbb{Z}jwL_1 - w^2 L_1 L_2 + w^2 L_1 L_2}{\mathbb{Z}jw} = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} \implies a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

3. En un transformador ideal  $\mu \rightarrow \infty$

Recordemos que:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} (\phi_{\ell 1} = 0) \quad ; \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} (\phi_{\ell 2} = 0)$$

Entonces:

$$a = \sqrt{\frac{N_1^2}{N_2^2}} = \frac{N_1}{N_2}$$

### 4.5.2. Cálculo de la impedancia de entrada

La impedancia de entrada se define como:

$$\mathbb{Z}_{in} = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{I}_1} \implies \mathbb{Z}_{in} = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} \cdot \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{I}_1} = a \frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{I}_1}$$

De la ecuación (4.4) se tiene:

$$\frac{\mathbb{V}_2}{\mathbb{I}_1} = \frac{\mathbb{Z}jwM}{\mathbb{Z} + R_2 + jwL_2} \quad \text{con} \quad a = \frac{(R_1 + jwL_1)(\mathbb{Z} + R_2 + jwL_2) + (wM)^2}{\mathbb{Z}jwM}$$

Luego para la impedancia de entrada en el transformador real se tiene:

$$\mathbb{Z}_{in} = \frac{(R_1 + j\omega L_1)(\mathbb{Z} + R_2 + j\omega L_2) + (wM)^2}{\mathbb{Z} + R_2 + j\omega L_2}$$

Recordemos que en un transformador ideal:

$$\mathbb{Z}_{in} = a^2 \mathbb{Z} \quad \text{con} \quad a = \frac{N_1}{N_2}$$

Teniendo en cuenta las características:

1. En un transformador ideal  $R_1 = R_2 = 0$

$$\mathbb{Z}_{in} = \frac{\mathbb{Z} j\omega L_1 - w^2 L_1 L_2 + (wM)^2}{\mathbb{Z} + j\omega L_2}$$

2. Acople perfecto ;  $(k = 1) \quad M^2 = L_1 L_2$

$$\mathbb{Z}_{in} = \frac{\mathbb{Z} j\omega L_1}{\mathbb{Z} + j\omega L_2} = \frac{\mathbb{Z}}{\frac{\mathbb{Z}}{j\omega L_1} + \frac{j\omega L_2}{j\omega L_1}}$$

3. En un transformador ideal, la permeabilidad del núcleo es infinita.

$$\mathbb{Z}_{in} = \frac{\mathbb{Z}}{\cancel{\frac{\mathbb{Z}}{j\omega L_1}} + \frac{L_2}{L_1}} \quad \text{donde} \quad \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{1}{a^2} \implies \boxed{\mathbb{Z}_{in} = a^2 \mathbb{Z}}$$

### 4.5.3. Desarrollo del modelo circuital del transformador monofásico comercial

Del circuito equivalente de la figura 4.18 se puede obtener:

$$\mathbb{V}_1 = (R_1 + jX_1)\mathbb{I}_1 + jX_m\mathbb{I}_2 = (R_1 + jX_1)\mathbb{I}_1 + jX_m\mathbb{I}_2 + jX_m\mathbb{I}_1 - jX_m\mathbb{I}_1$$

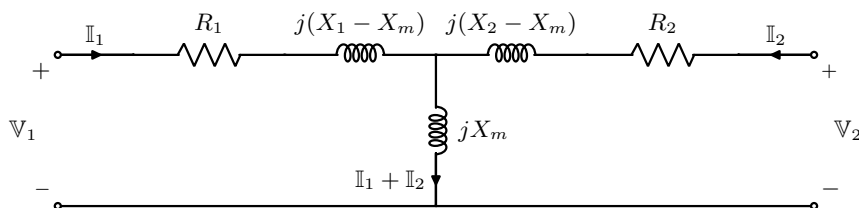
$$\mathbb{V}_2 = (R_2 + jX_2)\mathbb{I}_2 + jX_m\mathbb{I}_1 = (R_2 + jX_2)\mathbb{I}_2 + jX_m\mathbb{I}_1 + jX_m\mathbb{I}_2 - jX_m\mathbb{I}_2$$

Reescribiendo las ecuaciones:

$$\mathbb{V}_1 = [R_1 + j(X_1 - X_m)] \mathbb{I}_1 + jX_m(\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2)$$

$$\mathbb{V}_2 = [R_2 + j(X_2 - X_m)] \mathbb{I}_2 + jX_m(\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2)$$

Estas ecuaciones generan el siguiente circuito:





Este circuito presenta dos inconvenientes en el modelo circuital del transformador:

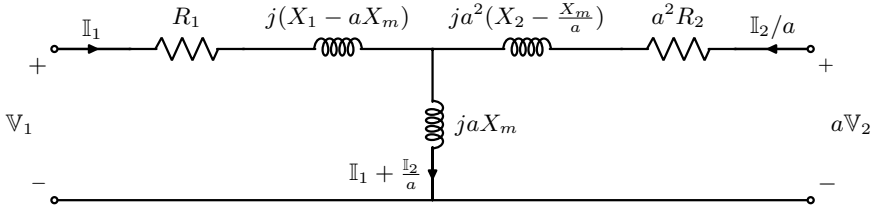
1. No cumple la propiedad de aislamiento eléctrico del transformador.
2. si  $X_m > X_1$  o  $X_m > X_2$  puede generar inductancias negativas.

Para evitar esto se utiliza la constante  $a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$ .

Segundo intento: Utilizando  $a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$  para prevenir inductancias negativas.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_1 &= (R_1 + jX_1)\mathbb{I}_1 + jX_m \frac{a}{a}\mathbb{I}_2 + jX_m a\mathbb{I}_1 - jX_m a\mathbb{I}_1 \\ a\mathbb{V}_2 &= \left[ (R_2 + jX_2) \frac{a}{a}\mathbb{I}_2 + jX_m \mathbb{I}_1 \right] a + jX_m \frac{a\mathbb{I}_2}{a} - jX_m \frac{a\mathbb{I}_2}{a} \\ \mathbb{V}_1 &= [R_1 + j(X_1 - aX_m)]\mathbb{I}_1 + jaX_m \left( \mathbb{I}_1 + \frac{\mathbb{I}_2}{a} \right) \\ a\mathbb{V}_2 &= [a^2 R_2 + ja(aX_2 - X_m)] \frac{\mathbb{I}_2}{a} + jaX_m \left( \mathbb{I}_1 + \frac{\mathbb{I}_2}{a} \right)\end{aligned}$$

De las ecuaciones obtenidas se llega al siguiente circuito equivalente:



Nótese que:

$$\begin{aligned}X_1 - aX_m &= wL_1 - awM = w \left( L_1 - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} k_{12} \sqrt{L_1 L_2} \right) \\ &= w(L_1 - k_{12}L_1) = wL_1(1 - k_{12}) \quad \text{donde} \quad 0 \leq k_{12} < 1\end{aligned}$$

Luego:  $X_1 - aX_m > 0$  Inductancias positivas

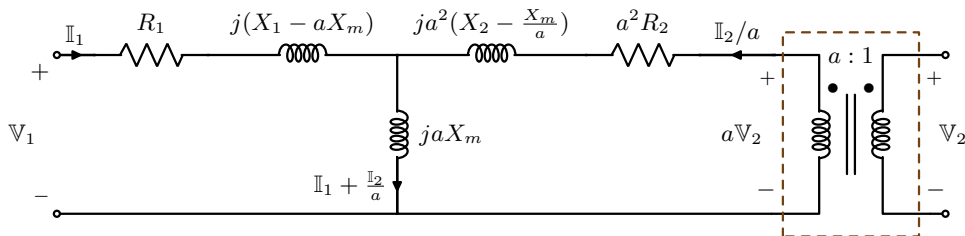
$$\begin{aligned}X_2 - \frac{X_m}{a^2} &= wL_2 - \frac{w k_{12}}{\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}} \sqrt{L_1 L_2} = w(L_2 - k_{12}L_2) = wL_2(1 - k_{12}) \\ &\text{donde} \quad 0 \leq k_{12} < 1\end{aligned}$$

Luego:  $X_2 - \frac{X_m}{a^2} > 0$  Inductancias positivas

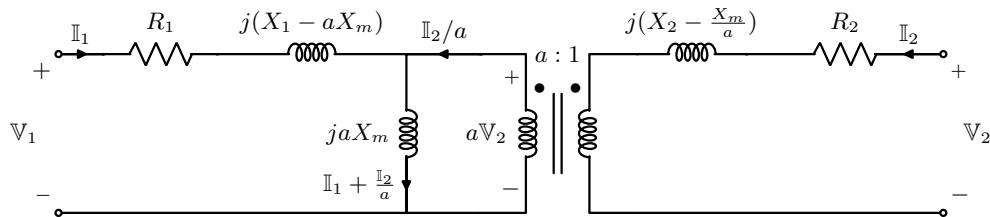
Sin embargo no es posible la implementación física de este circuito porque:

- Aún no se cumple la propiedad de *aislamiento* eléctrico de un transformador real.
- $\mathbb{V}_2$  e  $\mathbb{I}_2$  se encuentran alterados por la constante  $a = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$

Para resolver este se utiliza un *transformador ideal* con relación  $a : 1$ :



Refiriendo al lado de baja tensión se llega a:



Del circuito anterior se pueden relacionar los flujos por el transformador (ver figura 4.1) donde  $\phi_{núcleo} = \phi_{21} + \phi_{12}$  así:

$$\phi_{núcleo} = jaX_m \quad ; \quad \phi_{\ell 1} = j(X_1 - aX_m) \quad ; \quad \phi_{\ell 2} = j\left(X_2 - \frac{X_m}{a}\right)$$

Recordemos que:

$$L_1 = N_1^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell 1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \right) \quad ; \quad \phi_{11} = \phi_{\ell 1} + \phi_{21} \quad \begin{cases} \phi_{\ell 1} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{\ell 1}} \\ \phi_{21} = \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \end{cases}$$

$$L_2 = N_2^2 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell 2}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \right) \quad ; \quad \phi_{22} = \phi_{\ell 2} + \phi_{12} \quad \begin{cases} \phi_{\ell 2} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{\ell 2}} \\ \phi_{12} = \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}_{núcleo}} \end{cases}$$

$$N_1 \phi_{11} = \frac{N_1^2 i_1}{\mathcal{R}_{\ell 1}} + \frac{N_1^2 i_1}{\mathcal{R}_{núcleo}} = N_1^2 i_1 \left( \frac{1}{\mathcal{R}_{\ell 1}} + \frac{1}{\mathcal{R}_{núcleo}} \right) = L_1 i_1 = \lambda_{11}$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_{11} = \frac{d}{dt} L_1 i_1 = v_{ind L_1}$$

Siendo  $M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{núcleo}} \implies N_2 \phi_{21} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{núcleo}} i_1 = M i_1 = \lambda_{21}$

También  $M = \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1} \implies L_1 = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1}$

$$L_1 - a M = \frac{N_1 \phi_{11}}{i_1} - \frac{N_1}{N_2} \frac{N_2 \phi_{21}}{i_1} = \frac{N_1}{i_1} (\phi_{11} - \phi_{21})$$

$$L_1 - a M = \frac{N_1}{i_1} \phi_{\ell 1}$$

$$N_1 \phi_{12} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}_{\text{núcleo}}} i_2 = M i_2 = \lambda_{12}$$

También  $M = \frac{N_1 \phi_{12}}{i_2} \implies L_2 = \frac{N_2 \phi_{22}}{i_2}$

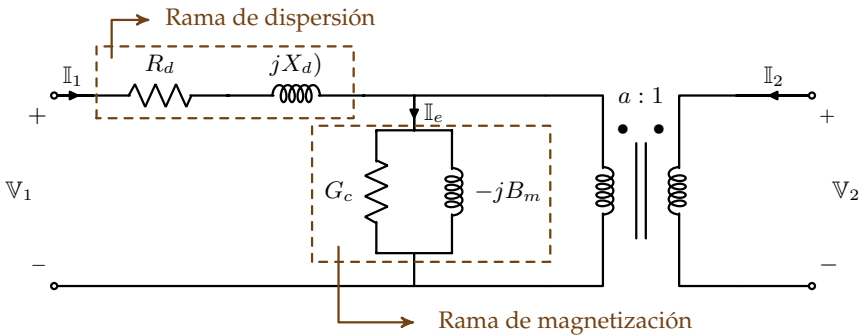
$$L_2 - \frac{M}{a} = \frac{N_2 \phi_{22}}{i_2} - \frac{N_2}{N_1} \frac{N_1 \phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2}{i_2} (\phi_{22} - \phi_{12})$$

$$L_2 - \frac{M}{a} = \frac{N_2}{i_2} \phi_{\ell 2}$$

## 4.6. Circuito equivalente del transformador real

El modelo del transformador real será una representación matemática de los fenómenos físicos que se presentan al interior del mismo; las bobinas tienen un acople imperfecto ocasionando flujos de dispersión.

Existe disipación de energía en forma de calor en las bobinas y al interior del núcleo produciendo una corriente de excitación ( $\mathbb{I}_e$ ) de aproximadamente 5 % de la corriente nominal del transformador. A continuación se plantea un circuito aproximado del transformador real que tiene una rama de dispersión:



**Figura 4.19.** Modelo circuital del transformador monofásico (una sola fuente de alimentación) comercial

Donde:  $R_d = R_1 + a^2 R_2$  ;  $X_d = X_{d1} + a^2 X_{d2}$

Del circuito equivalente del transformador se puede decir que:

- La *rama de dispersión* (serie), modela las pérdidas en el cobre (calentamiento) y pérdidas por flujos de dispersión.
- La *rama de excitación* (paralelo o shunt), modela las pérdidas del núcleo.
- $G_c$  modela las pérdidas por corrientes parasitas, de Foucault o Eddy.
- $B_m$  modela las pérdidas por *Histéresis*<sup>4</sup>.

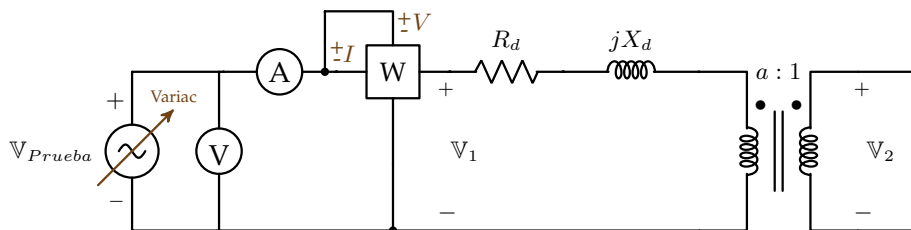
Usualmente la relación de transformación del transformador  $a$  se determina con los voltajes nominales (datos de placa) de las bobinas.

$$a = \frac{V_{\text{nominal-primario}}}{V_{\text{nominal-secundario}}}$$

## 4.7. Determinación experimental de los parámetros del modelo circuital del transformador

Es la forma como se determina experimentalmente los parámetros  $R_d$ ,  $X_d$  y  $G_c$ ,  $B_m$

### 4.7.1. Parámetros de la rama de dispersión $R_d$ y $X_d$



**Figura 4.20.** Prueba de cortocircuito para hallar los parámetros de la rama de dispersión

Se utiliza la prueba de cortocircuito.

Pasos:

1. Se cortocircuita un lado del transformador, usualmente se cortocircuita el lado del transformador de *mayor* corriente nominal.
2. Se alimenta el otro lado del transformador con una fuente de tensión de voltaje reducido, de tal manera que *circule la corriente nominal* por este lado del transformador.

<sup>4</sup>Es la tendencia de los dipolos magnéticos a reorganizarse a su estado inicial

3. Se toman medidas de potencia, voltaje y corriente.

Por ejemplo, supongamos que el lado secundario es el lado de mayor corriente nominal, obteniendo 3 datos: lectura del voltímetro (*Lect V*), lectura del vatímetro (*Lect W*) y lectura del amperímetro (*Lect A*).

Se sabe que la corriente nominal del primario del transformador se obtiene de:

$$I_{nom1} = \frac{S_{nom}}{V_{nom1}}$$

Donde  $S_{nom}$  es la potencia aparente nominal del transformador y es un dato de placa.

Cálculo de  $R_d$ :

$$\text{Lectura del vatímetro} \implies Lect W = R_d I_{nom1}^2 \implies \boxed{R_d = \frac{Lect W}{I_{nom1}^2}}$$

Cálculo de  $X_d$ :

$$\text{Lectura del voltímetro} \implies \boxed{X_d = \sqrt{\left(\frac{Lect V}{I_{nom1}}\right)^2 - R_d^2}}$$

Nótese que  $\left(\frac{Lect V}{I_{nom1}}\right)$  es la magnitud de la impedancia vista por  $V_{Prueba}$ .

**Nota:** Los parámetros de  $R_d$  y  $X_d$  se ubican en el lado del transformador donde se realiza la prueba.

En la prueba de corto circuito, el voltaje de corto circuito está en el rango de (1-15) % de la tensión nominal.

#### 4.7.2. Parámetros de la rama de excitación $G_c$ y $B_m$

Se utiliza la prueba de circuito abierto.

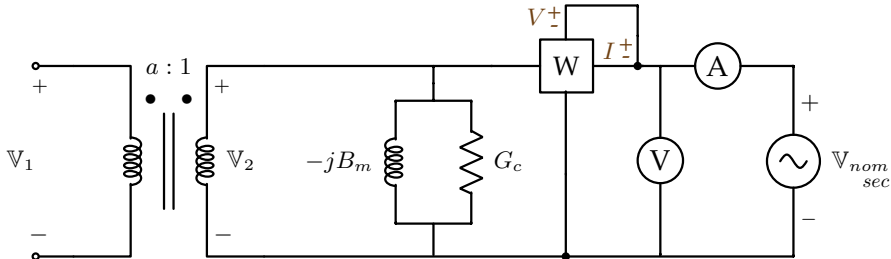
Pasos:

1. Se deja en circuito abierto un lado del transformador, usualmente el lado de *mayor* voltaje nominal.
2. Se alimenta el otro lado del transformador con una fuente de tensión a voltaje nominal (dato de la placa del transformador).
3. Se toman medidas de potencia, voltaje y corriente.

Por ejemplo, supongamos que el lado primario es el lado de mayor voltaje nominal (transformador reductor).

Debido a que la impedancia de la rama de excitación es mucho más grande que la

impedancia de la rama de dispersión, está última *se puede despreciar*.



**Figura 4.21.** Prueba de circuito abierto para hallar los parámetros de la rama de excitación

Cálculo de  $G_c$ :

Lectura del vatímetro  $\Rightarrow Lect W = G_c V_{nom-sec}^2 \Rightarrow \boxed{G_c = \frac{Lect W}{V_{nom-sec}^2}}$

Cálculo de  $B_m$ :

Lectura del amperímetro  $\Rightarrow \boxed{B_m = \sqrt{\left(\frac{Lect A}{V_{nom-sec}}\right)^2 - G_c^2}}$

**Nota:** Los parámetros de  $G_c$  y  $B_m$  se ubican en el lado del transformador donde se realiza la prueba.  
En la prueba de circuito abierto, la corriente de vacio está en el rango de (1-5) % de la corriente nominal.

**Ejemplo 4.7:** En las pruebas de un transformador monofásico de valores nominales:

$$S_{nom} = 20 \text{ kVA} \quad ; \quad V_{nom-prim} = 2400 \text{ V} \quad ; \quad V_{nom-sec} = 240 \text{ V}$$

Se obtuvo:

	Lectura amperímetro	Lectura voltímetro	Lectura vatímetro
Corto-circuito	-	54.4 V	284 W
Circuito-abierto	11 A	-	126.6 W

Todas las mediciones se encuentran en el lado de alta tensión. Hallar el circuito equivalente del transformador.

**Solución:**

$$I_{nom1} = \frac{20 \text{ kVA}}{2400 \text{ V}} = 8,33 \text{ A}$$

Rama de dispersión:

$$R_d = \frac{Lect W}{I_{nom1}^2} = \frac{284 \text{ W}}{(8,33 \text{ A})^2} = 4,1 \Omega$$

$$X_d = \left[ \left( \frac{Lect V}{I_{nom1}} \right)^2 - R_d^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{54,4 \text{ V}}{8,33 \text{ A}} \right)^2 + (4,1 \Omega)^2 \right]^{1/2} = 5,08 \Omega$$

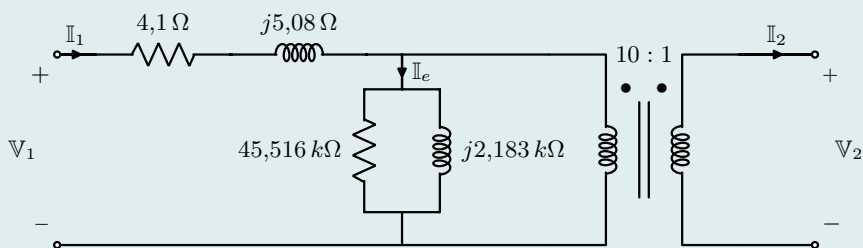
Rama de excitación:

$$G_c = \frac{Lect W}{V_{nom1}^2} = \frac{126,6 \text{ W}}{(2400 \text{ V})^2} = 21,97 \mu\text{S}$$

$$B_m = \left[ \left( \frac{Lect A}{V_{nom1}} \right)^2 - G_c^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{11 \text{ A}}{2400 \text{ V}} \right)^2 - (21,97 \mu\text{S})^2 \right]^{1/2} = 0,458 \text{ mS}$$

$$\text{ó } R_c = 45,516 \text{ k}\Omega \quad ; \quad X_m = 2,183 \text{ k}\Omega$$

El circuito equivalente sería el siguiente:



Impedancia de dispersión:

$$Z_d = (4,1 + j5,08) \Omega = 6,52 \angle 51,09^\circ \Omega$$

Impedancia de excitación:

$$Y_e = (21,97 \times 10^{-6} - j4,58 \times 10^{-4}) \text{ S} = 4,6 \times 10^{-4} \angle -87,26^\circ \text{ S}$$

$$Z_e = \frac{1}{Y_e} = 2171,4 \angle 87,26^\circ \Omega$$

Nótese que:  $|Z_e| \gg |Z_d|$

En algunas ocasiones es conveniente despreciar (circuito abierto) la rama de excitación sin recurrir a errores significativos.

**Ejemplo 4.8:** Un transformador de 10 MVA, 8/4 kV tienen una impedancia de dispersión de  $j1,2 \Omega$  vista en alta. La rama de excitación es despreciable. Al transformador se alimenta en baja con la siguiente combinación de cargas en paralelo:

- Una resistencia de  $6\ \Omega$
- Un motor de F.P= 0,866 ↓
- un condensador.

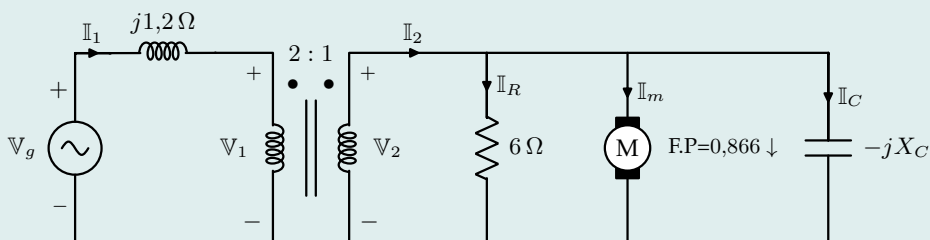
El transformador se alimenta por alta con 7,8 kV y la fuente entrega 5 MVA. El voltaje en la carga es de 4 kV.

Encontrar:

- Los kVAr del condensador.
- Los MW del motor.

*Nota:* Utilizar diagrama fasorial para el análisis.

**Solución:**



De los datos del problema se tienen los siguientes valores en el circuito:

$$V_g = 7,8 \angle \theta_{vg} \text{ kV} \quad ; \quad V_1 = 8 \angle \theta_P \text{ kV} \quad ; \quad V_2 = 4 \angle \theta_2 \text{ kV}$$

Además:

$$S_g = V_g I_1 \implies I_1 = \frac{S_g}{V_g} = \frac{5 \text{ MVA}}{7,8 \text{ kV}} \implies I_1 = 641,02 \text{ A}$$

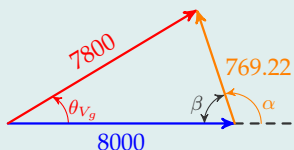
Se puede hallar la magnitud del voltaje en la impedancia de dispersión:

$$V_d = I_1 X_d = (641,02 \text{ A})(1,2 \Omega) \implies V_d = 769,22 \text{ V}$$

Tomando a  $V_1$  y aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff en el primario del transformador se tiene:

$$V_g = V_d + V_1 \implies 7800 \angle \theta_g = 769,22 \angle \beta + 8000 \angle 0^\circ$$

Tomando como referencia a  $V_1$  y haciendo un diagrama fasorial se llega a:



De la ley del coseno:

$$769,22^2 = 8000^2 + 7800^2 - 2 \cdot 8000 \cdot 7800 \cos \theta_{V_g}$$

Obteniendo que:  $\theta_{V_g} = 5,38^\circ$



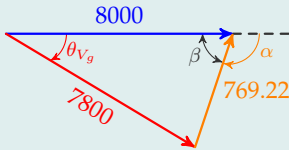
De la ley del seno:

$$\frac{\sen \beta}{7800} = \frac{\sen 5,38^\circ}{769,22} \implies \beta = 71,95^\circ$$

$$\implies \alpha = 180^\circ - 71,95^\circ = 108,05^\circ$$

Además:  $\mathbb{V}_d = jX_d \mathbb{I}_1 \implies \mathbb{I}_1 = \frac{769,22 \angle 108,05^\circ \text{ V}}{j1,2 \Omega} = 641,025 \angle 18,05^\circ \text{ A}$

Analizando otro diagrama fasorial:



$$\alpha = -108,05^\circ ; \quad \beta = -5,38^\circ$$

Llegando a que:

$$\mathbb{I}_1 = 641,025 \angle 161,95^\circ \text{ A}$$

Del resultado anterior se puede notar que se viola la restricción del ángulo de la impedancia  $-90^\circ < \theta_{I_1} < -90^\circ$  por lo cual se escogen los resultados obtenidos del primer diagrama.

De la relación de transformación del transformador:

$$a = \frac{\mathbb{V}_1}{\mathbb{V}_2} \implies \mathbb{V}_2 = \frac{\mathbb{V}_1}{a} = \frac{8 \angle 0^\circ \text{ kV}}{2} = 4 \angle 0^\circ \text{ kV}$$

$$\mathbb{I}_2 = 2 \mathbb{I}_1 = 2 \cdot 641,025 \angle 18,05^\circ \text{ A} = 1282,05 \angle 18,05^\circ \text{ A}$$

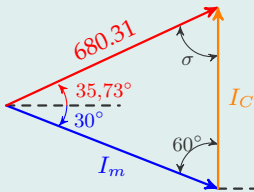
Aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el lado secundario del transformador:

$$\mathbb{I}_2 = \mathbb{I}_R + \mathbb{I}_m + \mathbb{I}_C$$

$$1282,05 \angle 18,05^\circ = \frac{2}{3} \times 10^3 \angle 0^\circ + I_m \angle (\cos^{-1} 0,866)^\circ + I_C \angle 90^\circ$$

$$680,31 \angle 35,73^\circ = I_m \angle -30^\circ + I_C \angle 90^\circ$$

Al expresar la ecuación en un diagrama fasorial se tiene:



De la ley del seno:

$$\frac{\sen 60^\circ}{680,31 \text{ A}} = \frac{\sen 65,73^\circ}{I_C} \implies I_C = 716,12 \text{ A}$$

Siendo:  $\sigma = 180^\circ - 60^\circ - 65,73^\circ = 54,27^\circ$

$$\frac{I_m}{\sen \sigma} = \frac{680,31 \text{ A}}{\sen 60^\circ} \implies I_m = 637,69 \text{ A}$$

Finalmente:

$$\bullet P_{motor} = (4000 \text{ V})(637,69 \text{ A}) \cdot 0,866 \implies \boxed{P_{motor} = 2,208 \text{ MW}}$$

$$\bullet Q_C = (4000 \text{ V})(716,12 \text{ A}) \sen(-90^\circ) \implies \boxed{Q_C = -2864,48 \text{ kVar}}$$

**Ejemplo 4.9:** Se va a probar un transformador de 15 kVA y 2300/230 V para determinar los componentes de la rama de excitación, sus impedancias en serie y su regulación de voltaje. Se obtuvieron los datos de las pruebas realizadas al transformador que se observan en la tabla.

Prueba de circuito abierto	Prueba de corto circuito
230 V	47 V
2.1 A	6.0 A
50 W	160 W
Lado de bajo voltaje	Lado de alto voltaje

- Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de alto voltaje.
- Encuentre el circuito equivalente de este transformador referido al lado de bajo voltaje.
- Calcule la regulación de voltaje a plena carga con un F.P.=0,8 ↓ ; F.P.=1 y F.P.=0,8 ↑.
- Cual es la eficiencia del transformador en plena carga con un F.P de 0,8 ↓.

**Solución:**

a) Circuito equivalente del transformador referido al lado de alto voltaje.

• *Cálculo de  $R_d$  y  $X_d$  (componentes rama de dispersión).*

Se utilizan las mediciones de la prueba de corto circuito (los valores obtenidos se ubican en el lado de alto voltaje, ya que la prueba de corto circuito se realizó en este lado del transformador).

$$I_{nom-prim} = \frac{15000 \text{ VA}}{2300 \text{ V}} = 6,52 \text{ A}$$

Se puede observar que  $6,0 \text{ A} < I_{nom-prim}$

Usando los datos de la tabla:

$$R_d = \frac{Lect W}{I_{nom-prim}^2} = \frac{160 \text{ W}}{(6,0 \text{ A})^2} \Rightarrow R_d = 4,44 \Omega$$

$$X_d = \left[ \left( \frac{Lect V}{I_{nom-prim}} \right)^2 - R_d^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{47 \text{ V}}{6,0 \text{ A}} \right)^2 - (4,44 \Omega)^2 \right]^{1/2}$$

$$X_d = 6,45 \Omega$$

• *Cálculo de  $G_c$  y  $B_m$  (componentes rama de excitación).*

Se utilizan las mediciones de la prueba de circuito abierto (los valores obtenidos se ubican en el lado de bajo voltaje, ya que la prueba de circuito abierto se realizó en este lado del transformador).

Usando los datos de la tabla:

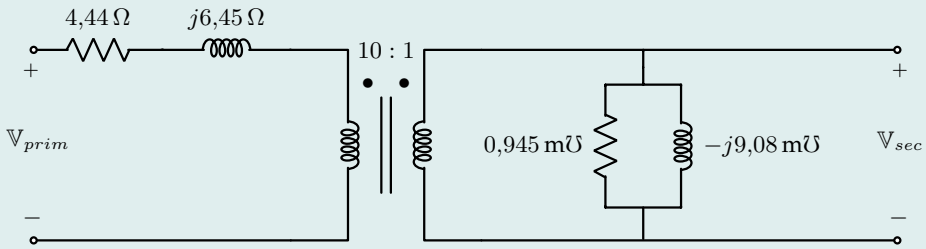
$$G_c = \frac{Lect W}{V_{nom-sec}^2} = \frac{50 W}{(230 V)^2} \Rightarrow G_c = 9,45 \times 10^{-4} \text{ U}$$

$$B_m = \left[ \left( \frac{Lect A}{V_{nom-sec}} \right)^2 - G_c^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{2,1 A}{230 V} \right)^2 - (9,45 \times 10^{-4} \text{ U})^2 \right]^{1/2}$$

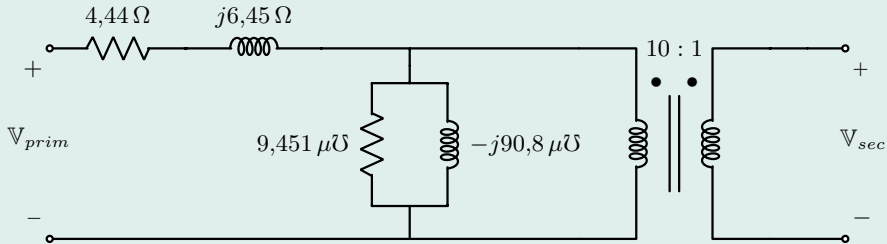
$$B_m = 9,08 \times 10^{-3} \text{ U}$$

$$\text{ó } R_c = \frac{1}{G_c} = 1058 \Omega \quad ; \quad X_m = \frac{1}{B_m} = 110,11 \text{ U}$$

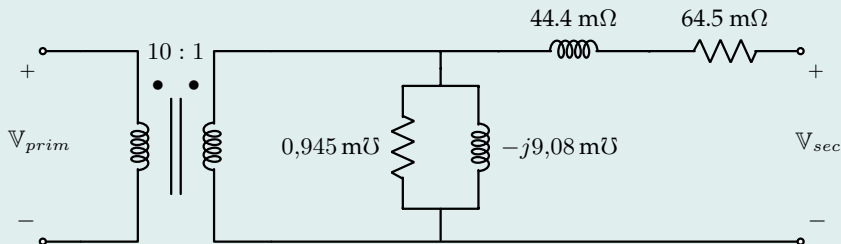
Modelo circuital del transformador:



Refiriendo el equivalente del transformador referido al lado de alto voltaje se tiene:



b) Circuito equivalente del transformador referido al lado de bajo voltaje.



c) Se tomará el circuito equivalente del transformador referido al lado de bajo voltaje. Del secundario del transformador se tiene:

$$I_{nom-sec} = \frac{S_{nom}}{V_{nom-sec}} = \frac{15 \text{ kVA}}{230 V} = 65,21 A$$

Recordemos que:

$$\%RV = \frac{V_{vacio} - V_{plena-carga}}{V_{plena-carga}} \cdot 100 \%$$

Independientemente del F.P de la carga:  $V_{plena-carga} = 230 \text{ V}$

i)  $\text{F.P.} = 0,8 \downarrow$

Tomando el voltaje en la carga  $V_0$  como referencia:

$$V_0 = 230 \angle 0^\circ \text{ V} \quad ; \quad I_0 = 65,21 \angle (-\cos^{-1} 0,8) \text{ A} = 65,21 \angle -36,87^\circ \text{ A}$$

Se tiene que:

$$V_{sec} = (44,4 + j64,5) \text{ m}\Omega \cdot (65,21 \angle -36,87^\circ \text{ A}) + (230 \angle 0^\circ \text{ V}) = 234,84 \angle 0,4^\circ \text{ V}$$

Cuando se desconecta la carga:  $V_0 = V_{sec} = 234,84 \angle 0,4^\circ \text{ V}$

Ahora bien:

$$\%RV = \frac{234,84 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 100 \% \implies \boxed{\%RV|_{\text{F.P.:}0,8\downarrow} = +2,1 \%}$$

ii)  $\text{F.P.} = 1$

$$V_0 = 230 \angle 0^\circ \text{ V} \quad ; \quad I_0 = 65,21 \angle 0^\circ \text{ A} \implies V_{sec} = 232,93 \angle 1,034^\circ \text{ V}$$

$$\%RV = \frac{232,93 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 100 \% \implies \boxed{\%RV|_{\text{F.P.:}1} = +1,7 \%}$$

iii)  $\text{F.P.} = 0,8 \uparrow$

$$V_0 = 230 \angle 0^\circ \text{ V} \quad ; \quad I_0 = 65,21 \angle 36,87^\circ \text{ A} \implies V_{sec} = 229,84 \angle 1,27^\circ \text{ V}$$

$$\%RV = \frac{229,84 \text{ V} - 230 \text{ V}}{230 \text{ V}} \cdot 100 \% \implies \boxed{\%RV|_{\text{F.P.:}0,8\uparrow} = -0,07 \%}$$

**d)** Se sabe que:  $\eta = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} \cdot 100 \%$

Donde:  $P_{sal} = S \cdot \text{F.P.} = (15000)(0,8) \text{ W} = 12000 \text{ W}$

y  $P_{ent} = V_g \cdot I_g \cos(\theta_{V_g} - \theta_{I_g})$

En la rama de excitación:

$$I_e = (G_c - jB_m) V_{sec} = (9,08 - j0,945) \text{ m}\Omega \cdot 234,84 \angle 0,4^\circ \text{ V} = 2,14 \angle -5,54^\circ \text{ A}$$

La corriente a la entrada del transformador será:

$$I_g = \frac{I_e + I_0}{a} = \frac{2,14 \angle -5,54^\circ \text{ A} + 65,21 \angle -36,87^\circ \text{ A}}{10} = 6,7 \angle -35,92^\circ \text{ A}$$

Teniendo que:

$$P_{ent} = (2348,4 \text{ V})(6,7 \text{ A}) \cos(0,4^\circ - 35,92^\circ) = 12806,33 \text{ W}$$

Ahora bien:

$$\eta = \frac{12000 \text{ W}}{12806,33 \text{ W}} \cdot 100 \% = 93,7 \%$$

Otra forma de obtener la potencia de entrada sería con la siguiente ecuación:

$$P_{ent} = P_{sal} - P_{pérdidas}$$

$$P_{ent} = 12000 \text{ W} + (44,4 \text{ m}\Omega)(65,21 \text{ A})^2 + (0,945 \text{ m}\Omega)(234,84 \text{ V})^2 = 12240,92 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{12000 \text{ W}}{12240,92 \text{ W}} \cdot 100 \% = 98,03 \%$$

## 4.8. Transformadores en por unidad (p.u)

Las cantidades de los sistemas de potencia, como la tensión, la corriente, la potencia y la impedancia, a menudo se expresan por unidad o porcentaje de valores base especificados. Entonces se pueden hacer los cálculos con cantidades por unidad, en lugar de cantidades reales.

Una ventaja del sistema por unidad es que, especificando de manera apropiada las cantidades base, se puede simplificar el circuito equivalente del transformador. Se puede eliminar el devanado del transformador ideal, de tal forma que las tensiones, las corrientes y las impedancias y admitancias externas, expresadas por unidad, no cambian cuando se refieren de uno de los lados del transformador hacia el otro. El sistema por unidad permite evitar la posibilidad de cometer errores graves de cálculo al referir las cantidades de un lado del transformador hacia el otro [6].

$$\text{Valor en p.u} = \frac{\text{Valor real}}{\text{Valor base}}$$

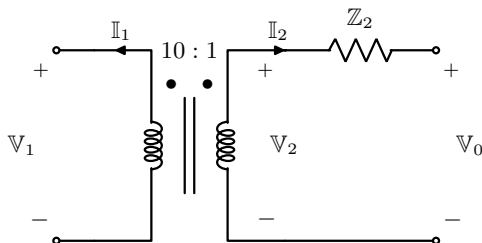
Del modelo del transformador de la figura se toman como valor base el voltaje primario, secundario y la potencia nominal.

Teniendo que:

$$a = \frac{V_{1N}}{V_{2N}} \quad ; \quad S_b = S_{nom}$$

Para los voltajes:

$$V_{1p.u} = \frac{V_1}{V_{1N}} = \frac{a V_2}{a V_{2N}}$$



$$V_{1p.u} = V_{2p.u}$$

Para las corrientes:

$$I_{1p.u} = \frac{I_1}{I_{1b}} = \frac{I_1}{\frac{S_b}{V_{1N}}} = \frac{I_1 V_{1N}}{S_b} = \left( \frac{I_2}{a} \right) \frac{a V_{2N}}{S_b} = \frac{I_2 V_{2N}}{S_b}$$

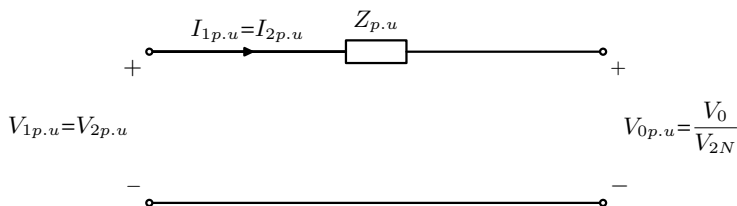
$$I_{2p.u} = \frac{I_2}{I_{2b}} = \frac{I_2}{\frac{S_b}{V_{2N}}} = \frac{I_2 V_{2N}}{S_b} \quad \boxed{I_{1p.u} = I_{2p.u}}$$

Para las impedancias:  $Z_1 = a^2 Z_2$

$$Z_{1p.u} = \frac{Z_1}{Z_{1b}} = \frac{Z_1}{\frac{V_{1N}}{I_{1N}}} = \frac{Z_1}{\frac{V_{1N}/S_b}{I_{1N}}} = \frac{Z_1}{\frac{V_{1N}}{S_b}} = Z_1 \frac{S_b}{V_{1N}^2} = a^2 Z_2 \frac{S_b}{a^2 V_{2N}^2} = \frac{Z_2 S_b}{V_{2N}^2}$$

$$Z_{2p.u} = \frac{Z_2}{Z_{2b}} = \frac{Z_2}{\frac{V_{2N}^2}{S_b}} = \frac{Z_2 S_b}{V_{2N}^2} \quad \boxed{Z_{1p.u} = Z_{2p.u}}$$

Finalmente, se llega al siguiente circuito equivalente del transformador en p.u.



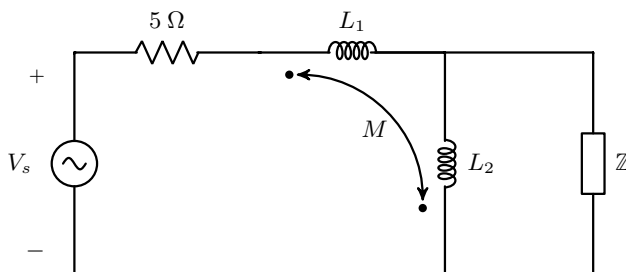
**Figura 4.22.** Circuito equivalente del transformador en por unidad (p.u.)

## 4.9. Ejercicios propuestos

- Un transformador de potencia monofásico de 200 MVA y 15/200 kV tiene una resistencia de 0,012 por unidad y una reactancia de 0,05 por unidad (estos datos se tomaron de la placa características del transformador). La impedancia de magnetización es de  $j100$  por unidad. Las pérdidas en el núcleo son despreciables.
  - Calcule la regulación de voltaje de este transformador a plena carga (voltaje nominal y corriente nominal) y un factor de potencia de 0.8 en retraso.
  - Calcule la eficiencia del transformador bajo las condiciones del inciso a).

**Respuesta:**  $\%RV = 5,03 \%$ ;  $\eta = 94,71 \%$

2. En el circuito de la figura  $v_s(t) = 5 \cos(4t + 30^\circ) \text{ V}$ ,  $L_1 = 2 \text{ H}$ ,  $L_2 = 1 \text{ H}$ ,  $M = 1,5 \text{ H}$ . Hallar: a)  $Z$  para que la fuente suministre máxima potencia; b)Cuál es la máxima potencia.

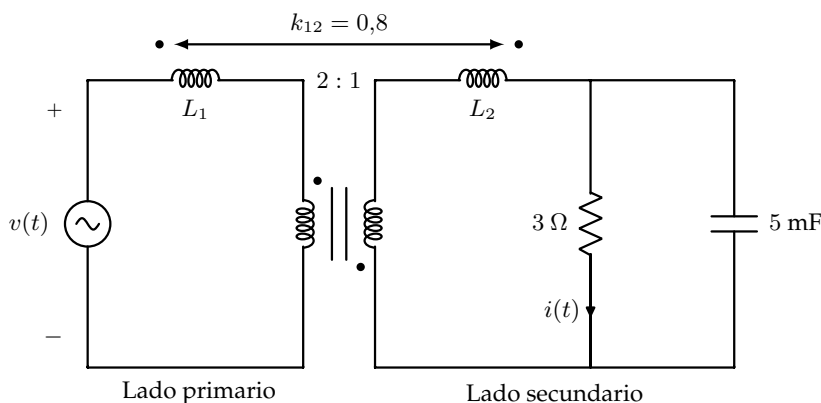


Respuesta: a)  $Z = (0,8 - j4) \Omega$  b)  $1,25 \text{ W}$

3. La impedancia de dispersión total de un transformador de 2500/250 V, 20 kVA, es de  $(6 + j8) \Omega$  referida a la parte de alta tensión. Un ensayo en vacío con dicho transformador y los instrumentos colocados en baja, ha dado los siguientes resultados: 2 A y 300 W. El transformador alimenta en baja una carga de F.P. 0.707 en atraso que absorbe la corriente nominal, estando alimentado por alta con el voltaje nominal. Usando diagrama fasorial en el análisis encontrar el voltaje en la carga y la potencia aparente de la fuente. (Usar circuito aproximado con la rama de excitación desplazada hacia la fuente)

Respuesta:  $V_o = 242,07 \text{ V}$ ;  $S_g = 20495 \text{ VA}$

4. En el circuito de la figura,  $v(t) = 20 \cos(500t) \text{ V}$ ,  $L_1 = 30 \text{ mH}$  y  $L_2 = 10 \text{ mH}$ . Referir el circuito al lado secundario del transformador ideal y hallar la corriente  $i(t)$ .



Respuesta:  $i(t) = 86,5 \cos(500t - 172,2^\circ) \text{ mA}$

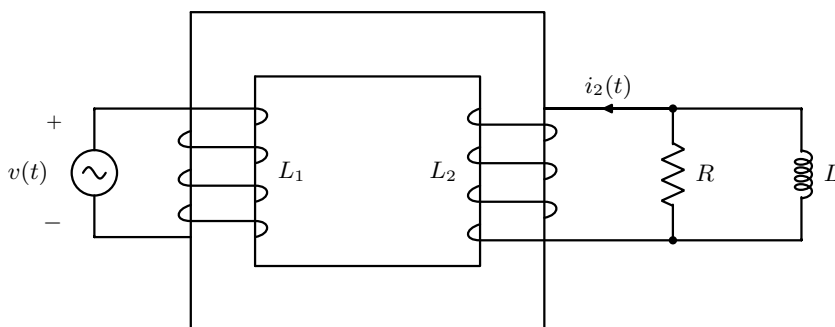
5. El devanado secundario de un transformador real tiene un voltaje terminal (a la salida) de  $v_s(t) = 282,8 \sin(377t)$  V. La relación de vueltas del transformador es de 100 : 200 ( $a = 0,5$ ). La corriente secundaria del transformador es de  $i_s(t) = 7,07 \sin(377t - 36,87^\circ)$  A. Las impedancias del modelo circuital de este transformador referidas al lado primario son:

$$\begin{aligned} R_d &= 0,20 \, \Omega; & X_d &= 0,80 \, \Omega \\ R_c &= 300 \, \Omega; & X_m &= 100 \, \Omega \end{aligned}$$

- a) ¿Cuál es la corriente primaria (de la fuente) de este transformador ?  
b) ¿Cuál es la regulación de voltaje y su eficiencia ?

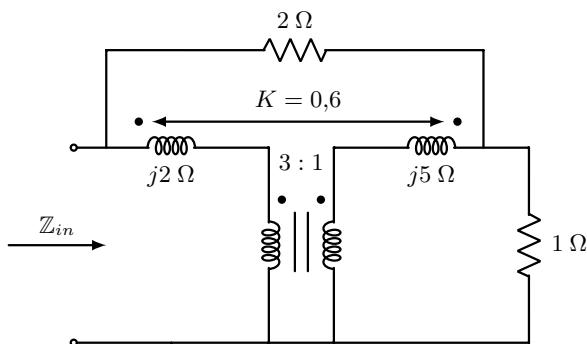
*Respuesta:*  $I_P = 10,97 \angle -39,97^\circ$  A;  $\%RV = 6,53\%$ ;  $\eta = 93,25\%$

6. En el circuito de la figura,  $R = 5 \, \Omega$ ,  $L = 30$  mH,  $i_2(t) = 10\cos(500t - 30^\circ)$  A,  $L_1 = 0,1$  H y  $L_2 = 0,06$  H,  $k_{12} = 0,8$ . La resistencia interna de las bobinas es despreciable. Calcule  $v(t)$  usando Thévenin (pruebas separadas).



*Respuesta:*  $v(t) = 211,077 \cos(500t + 39,89^\circ)$  V

7. Para el circuito de la siguiente figura, calcular la impedancia de entrada  $Z_{in}$ .



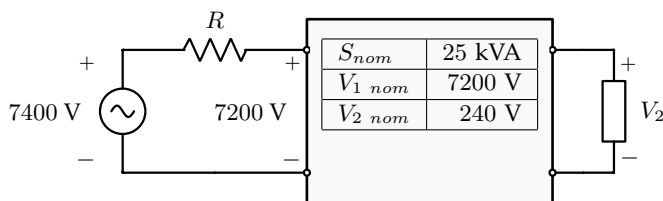
*Respuesta:*  $Z_{in} = 3 \angle 0^\circ \, \Omega$



8. Se tiene un transformador monofásico de 25 kVA, 7200/240 V, cuyas mediciones de voltaje, corriente y potencia activa son las siguientes:

Prueba	Voltaje (V)	Corriente (A)	Potencia (W)
Circuito abierto	240	3.125	128
Corto circuito	360	3.4722	391

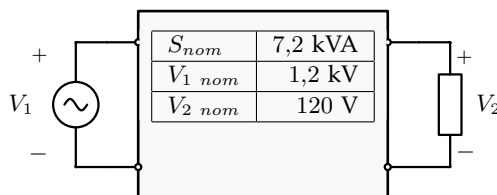
Si la carga tiene un FP de 0.707 en atraso y circula la corriente nominal, hallar  $R$ , la potencia compleja del generador y la regulación de voltaje en la carga.



**Nota:** Utilizar valores en por unidad y aplicar el modelo del transformador con la rama de excitación conectada en paralelo a su alimentación.

*Respuesta:*  $R = 81,4 \Omega$ ;  $S_g = 18435 + j18809 \text{ VA}$ ;  $\%RV = 7,59 \%$

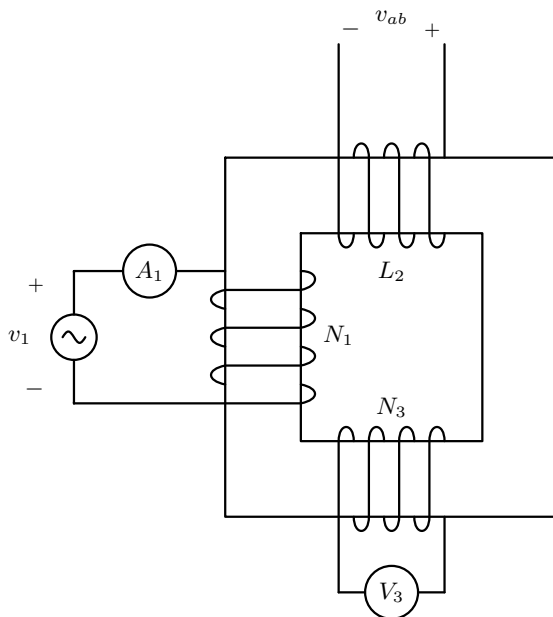
9. Un transformador monofásico con valores nominales 1,2kV/120 V y 7,2 kVA, tiene parámetros, referidos al primario,  $R_1 = r_1 + a^2 r_2 = 1 \Omega$ ,  $X_1 = x_1 + a^2 x_2 = 4 \Omega$ . A voltaje nominal, las pérdidas del núcleo pueden suponerse de 40 W para todos los valores de corriente de carga.



- a) Determine la eficiencia y la regulación del transformador cuando entrega en baja 7,2 kVA a  $V_2 = 120 \text{ V}$  y a factor de potencia de i) 0,8 en atraso, ii) 0,8 en adelante.
- b) Puede demostrarse que, para un voltaje de carga y factor de potencia dados, la eficiencia de un transformador alcanza su valor máximo al nivel de los kVA de la carga, lo que hace que las pérdidas  $I^2 R$  de los devanados sean iguales a las pérdidas del núcleo. Mediante este resultado, determine la eficiencia máxima del transformador anterior a voltaje nominal y a factor de potencia de 0,8, así como el nivel de los kVA de la carga al que esto ocurre.

*Respuesta:* a) i)  $\eta = 98,69 \%$ ,  $\%RV = 1,6 \%$  ii)  $\eta = 98,69 \%$ ,  $\%RV = -0,78 \%$   
b)  $\eta = 98,7 \%$ ,  $S = 7589,4 \text{ VA}$

10.  $N_1 = 600$ ,  $N_3 = 400$  y  $L_2 = 10$  mH. El conductor de la bobina 3, es el doble de grueso (sección transversal) que el conductor de la bobina 1. El área de la sección transversal del núcleo es uniforme. Cuando se aplican 120 V de corriente continua a la bobina 1, el amperímetro  $A_1$  marca 30 A. Si se aplica  $v_1(t) = 120\sqrt{2}\sin(377t)$ ,  $A_1$  marca 8 A, y el voltímetro  $V_3$  marca 61,7 V. Calcular  $v_{ab}(t)$  de circuito abierto, si los terminales de la bobina 3 se cortocircuitan y se aplica a la bobina 1 el mismo  $v_1(t) = 120\sqrt{2}\sin(377t)$ . Asuma  $k_{31} = k_{21} = 0,8$  y  $k_{23} = 0,9$ .



Respuesta:  $v_{ab}(t) = 36,78\sqrt{2} \sin(377t + 0,15^\circ)$  V

# 5

## Circuitos resonantes y resonancia

### 5.1. Resonancia

Condición que se presenta en circuitos eléctricos conformados por elementos R,L,C en régimen sinusoidal permanente donde el voltaje y la corriente *se encuentran en fase*.

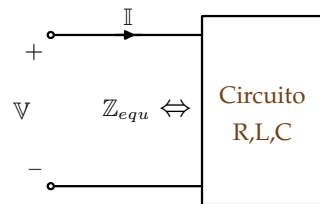
#### 5.1.1. Resonancia serie

Siendo:  $\mathbb{V} = V\angle\theta_V$  e  $\mathbb{I} = I\angle\theta_I$

$$\mathbb{Z}_{equ} = \frac{\mathbb{V}}{\mathbb{I}} = \frac{V\angle\theta_V}{I\angle\theta_I} = R_{equ} + jX_{equ}$$

En resonancia serie:

$$X_{equ} = 0 \implies \mathbb{Z}_{equ} = R_{equ} \text{ y } \boxed{\theta_V = \theta_I}$$



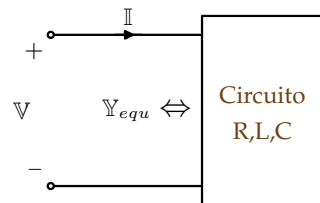
#### 5.1.2. Resonancia Paralelo

Siendo:  $\mathbb{V} = V\angle\theta_V$  e  $\mathbb{I} = I\angle\theta_I$

$$\mathbb{Y}_{equ} = \frac{1}{\mathbb{Z}_{equ}} = \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{V}} = G_{equ} + jB_{equ}$$

En resonancia Paralelo:

$$B_{equ} = 0 \implies \mathbb{Y}_{equ} = G_{equ} \text{ y } \boxed{\theta_I = \theta_V}$$



**Nota:**  $X_{equ}$  y  $B_{equ}$  son elementos que dependen de la frecuencia angular  $w$ . Al valor de  $w$  que cumple que  $X_{equ} = 0$  y  $B_{equ} = 0$  se le conoce como la frecuencia de resonancia  $w_r$ .

## 5.2. Circuito filtro

Red de dos puertos (cuadripolos) cuya función consiste en *atenuar* (bloquear) o dejar *pasar* ciertas componentes a frecuencias determinadas de la fuente de alimentación.

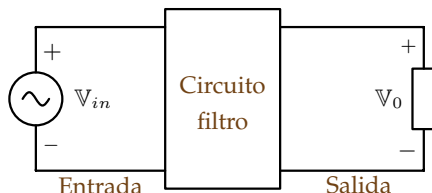


Figura 5.1. representación circuito filtro

### 5.2.1. Función de transferencia compleja $\mathbb{H}(w)$

La función de transferencia del filtro es la relación en forma compleja entre  $V_0$  y  $V_{in}$ .

Matemáticamente se expresa como:

$$\mathbb{H}(w) = \frac{V_0}{V_{in}}$$

Siendo:  $V_0 = V_0 \angle \theta_{V_0}$  y  $V_{in} = V_{in} \angle \theta_{V_{in}} \implies \mathbb{H}(w) = \frac{V_0}{V_{in}} \angle (\theta_{V_0} - \theta_{V_{in}})$

Dependiendo del comportamiento de  $|\mathbb{H}(w)|$  con  $w$ , se caracteriza el circuito filtro como:

- Pasa bajo
- Pasa banda
- Pasa alto
- Rechaza banda

Un filtro ideal, tiene el siguiente comportamiento de  $|\mathbb{H}(w)|$  en función de  $w$ :

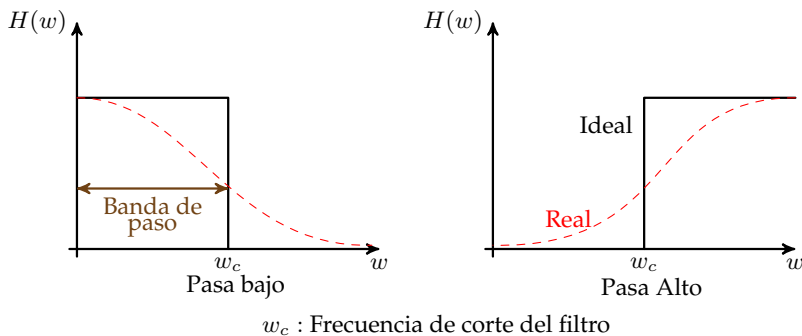


Figura 5.2. Comportamiento del filtro pasa bajo y filtro pasa alto

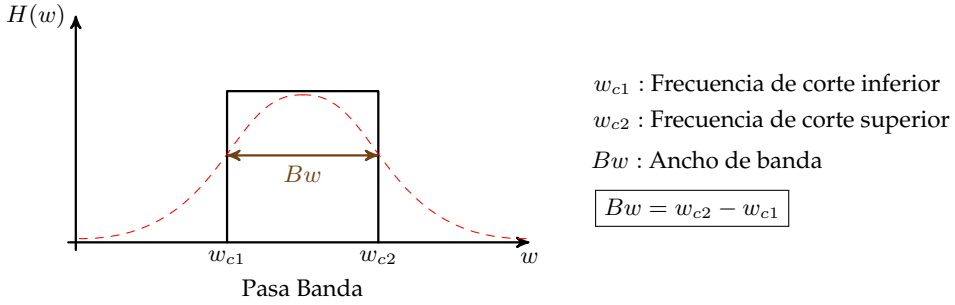
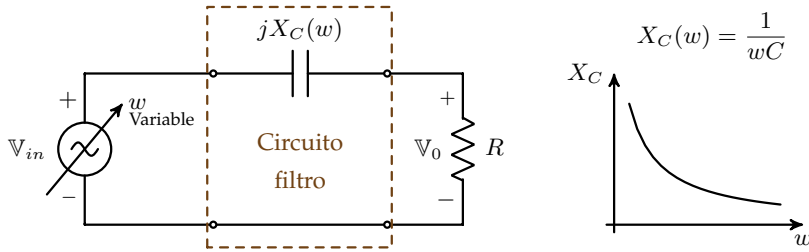


Figura 5.3. Comportamiento filtro pasa banda

### 5.2.2. Algunos circuitos simples que actúan como filtro

#### I. Serie $R - C$

Figura 5.4. Circuito filtro: Serie  $R - C$ 

Cálculo de la función de transferencia:  $\mathbb{H} = \frac{\mathbb{V}_0(w)}{\mathbb{V}_{in}(w)}$

Del circuito:

$$\mathbb{V}_0(w) = \frac{R}{R - jX_C(w)} \cdot \mathbb{V}_{in}$$

$$\mathbb{H}(w) = \frac{R}{R - jX_C(w)} = \frac{R}{R - j\frac{1}{wC}} = H(w) \angle \theta_H(w)$$

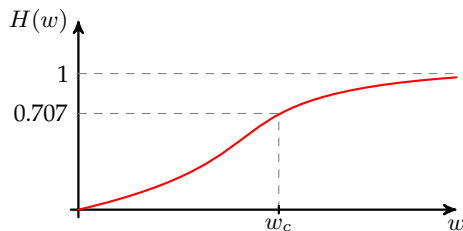
Siendo  $H(w)$  la magnitud de  $\mathbb{H}(w) \implies H(w) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2}}$

Siendo  $\theta(w)$  la fase de  $\mathbb{H}(w)$

$$\theta_H(w) = 0 - \tan^{-1} \left( -\frac{1}{wCR} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1}{wCR} \right)$$

Nótese que en este circuito filtro

$$\begin{aligned}\theta_{V_0} &> \theta_{V_{in}} \\ \lim_{w \rightarrow 0} H(w) &\rightarrow 0 \\ \lim_{w \rightarrow \infty} H(w) &\rightarrow 1\end{aligned}$$



Este circuito se comporta como uno pasa-alto.

$w_c$  es la frecuencia de corte del circuito. Cuando el circuito opera a la frecuencia de corte, la potencia que absorbe  $R$  es la mitad de su potencia máxima.

La potencia en  $R$  es máxima cuando su voltaje es máximo, la máxima tensión que puede alcanzar  $R$  es  $V_{in}$ .

$$P_{R_{max}} = \frac{V_{in}^2}{R}$$

Cuando  $w = w_c$  se cumple que:

$$P_R|_{w=w_c} = \frac{1}{2} P_R|_{max}$$

Teniendo que:

$$R \frac{V_0^2(w_c)}{R} = \frac{1}{2} \frac{V_{in}^2}{R} R \Rightarrow \left( \frac{V_0(w_c)}{V_{in}} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{H(w_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Para obtener  $w_c$  en función de los parámetros del circuito se aplica la condición:

$$H(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{w_c C} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

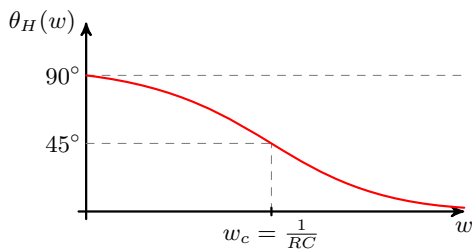
Resolviendo para  $w_c$  se obtiene:

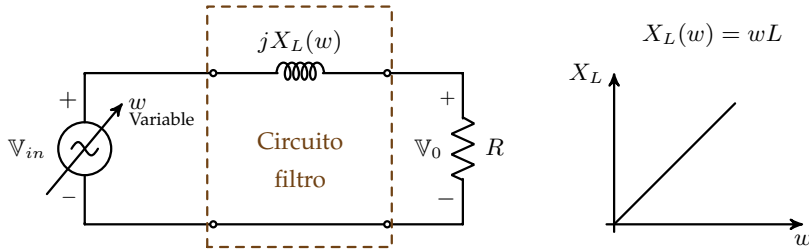
$$\boxed{w_c = \frac{1}{RC}} [rad/s] \Rightarrow \boxed{f_c = \frac{1}{2\pi(RC)}} [Hz]$$

Nótese que cuando  $w = w_c$

$$X_C(w_c) = \frac{1}{w_c C} = \frac{1}{\frac{1}{RC} C} = R$$

$$\boxed{X_C(w_c) = R}$$



II. Serie  $R - L$ Figura 5.5. Circuito filtro: Serie  $R - L$ 

Cálculo de la función de transferencia compleja:  $\mathbb{H}(w) = \frac{\mathbb{V}_0(w)}{\mathbb{V}_{in}(w)}$

Del circuito:

$$\mathbb{V}_0(w) = \frac{R}{R + jX_L(w)} \cdot \mathbb{V}_{in}$$

$$\mathbb{H}(w) = \frac{R}{R + jX_L(w)} = H(w) \angle \theta_H(w)$$

Teniendo:

Magnitud:  $H(w) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (wL)^2}}$

Fase:  $\theta_H(w) = -\tan^{-1}\left(\frac{wL}{R}\right)$

Nótese que en este circuito filtro

$$\theta_{V_{in}} \geq \theta_{V_0}$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} H(w) \rightarrow 1$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} H(w) \rightarrow 0$$

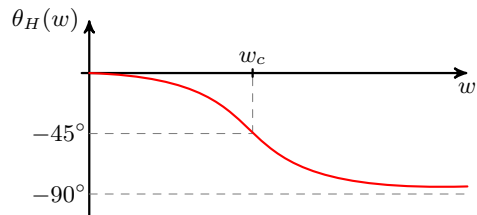
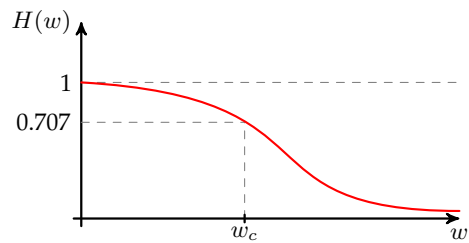
Este circuito se comporta como uno pasabajo.

Para el cálculo de  $w_c$  se aplica la condición:

$$H(w_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{R}{\sqrt{R^2 + (w_c L)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolviendo para  $w_c$  se obtiene:

$$\boxed{w_c = \frac{R}{L}} [rad/s] \implies \boxed{f_c = \frac{R}{2\pi L}} [Hz]$$



Nótese que cuando  $w = w_c$

$$X_L(w_c) = w_c L = \frac{R}{L} L = R \implies \boxed{X_L(w_c) = R}$$

### III. Serie $RLC$

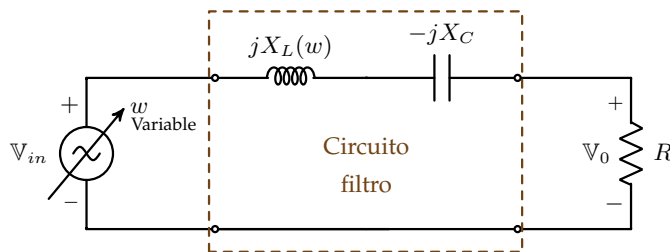


Figura 5.6. Circuito filtro: Serie  $RLC$

Cálculo de la función de transferencia compleja:  $\mathbb{H}(w) = \frac{V_0(w)}{V_{in}(w)}$

Del circuito:

$$V_0(w) = \frac{R}{R + j(X_L - X_C)} \cdot V_{in}(w)$$

$$\mathbb{H}(w) = \frac{R}{R + j(X_L - X_C)} = H(w) \angle \theta_H(w)$$

Teniendo:

Magnitud:  $H(w) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}}$

Fase:  $\theta_H(w) = -\tan^{-1} \left( \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R} \right)$

Nótese que en este circuito filtro

$$\lim_{w \rightarrow 0} H(w) \rightarrow 0 \text{ (Efecto capacitivo)}$$

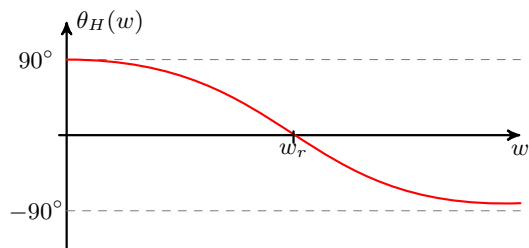
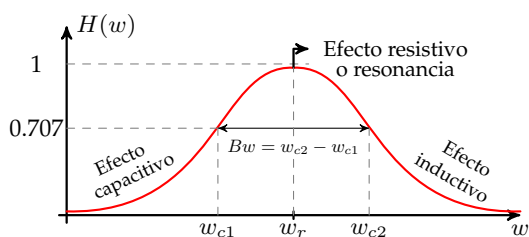
$$\lim_{w \rightarrow \infty} H(w) \rightarrow 0 \text{ (Efecto inductivo)}$$

Este circuito se comporta como un filtro pasa-banda.

Para el cálculo de  $w_r$  se aplica la condición:

$$H(w_r) = 1$$

$$w_r L = \frac{1}{w_r C} \implies w_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$





Donde  $w_r$  es la frecuencia de resonancia.

Calculo de las frecuencias de corte:

se aplica la condición:  $H(w_{c1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(w_{c1,2} L - \frac{1}{w_{c1,2} C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se resuelve para las frecuencias de corte  $w_{c1}$  y  $w_{c2} \Rightarrow 2R^2 = R^2 + \left(w_c L - \frac{1}{w_c C}\right)^2$

Al resolver la ecuación cuadrática se tiene:

$$\begin{aligned} w_c L - \frac{1}{w_c C} + R &= 0 \\ LCw_c^2 + RCw_c - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_c L - \frac{1}{w_c C} - R &= 0 \\ LCw_c^2 - RCw_c - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$w_c = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$w_c = \frac{RC \pm \sqrt{(RC)^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$w_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad [rad/s]$$

$$w_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad [rad/s]$$

Calculo de Bw (ancho de banda):

$$Bw = w_{c2} - w_{c1} = \frac{R}{2L} + \frac{R}{2L} \Rightarrow Bw = \frac{R}{L} [rad/s] \quad \text{ó} \quad Bw = \frac{R}{2\pi L} [Hz]$$

Nótese que:

$$w_{c1} \cdot w_{c2} = \frac{1}{LC} \quad \text{donde} \quad \frac{1}{LC} = w_r^2 \Rightarrow \boxed{w_r = \sqrt{w_{c1} \cdot w_{c2}}}$$

Nótese que la  $w_r$  obtenida es la media geométrica.

Se define el factor de calidad del filtro como:  $\boxed{Q = \frac{w_r}{Bw}}$

Teniendo en cuenta que  $Bw = \frac{R}{L} \Rightarrow Q = \frac{w_r}{\frac{R}{L}} = \frac{w_r L}{R}$

Otra forma de obtener  $Q$  es reemplazar  $w_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  entonces:

$$Q = \frac{L}{\sqrt{LC} R} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Se pueden expresar las frecuencias de corte  $w_{c1}$  y  $w_{c2}$  en función de  $Q$ , reemplazando  $\frac{R}{L} = \frac{w_r}{Q}$  se llega a:

$$w_{c1} = w_r \left[ -\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right] \quad ; \quad w_{c2} = w_r \left[ \frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 + 1} \right]$$

Si  $Q > 10$  se pueden aproximar las frecuencias de corte así:

$$w_{c1} \cong w_r \left( -\frac{1}{2Q} + 1 \right) \quad ; \quad w_{c2} \cong w_r \left( \frac{1}{2Q} + 1 \right)$$

Sumando las frecuencias de corte se tiene:

$$w_{c1} + w_{c2} \cong 2w_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_r \cong \frac{w_{c1} + w_{c2}}{2}}$$

Nótese que la  $w_r$  obtenida es un valor promedio, además esto es válido solo si  $Q > 10$

Nótese que si  $Q$  es alto, en resonancia los voltajes en  $L$  y  $C$  se pueden hallar así:

**Un filtro tiene alta selectividad cuando  $Q > 10$**

Para que el voltaje y la corriente estén en fase, del circuito se debe cumplir que:

$$Z_{equ} = R$$

La corriente de entrada al circuito es:  $I_{in} = \frac{V_{in}}{|Z_{equ}|} = \frac{V_{in}}{R}$

El voltaje en la inductancia es:

$$V_L = w_r L \cdot I_{in} = w_r L \frac{V_{in}}{R} = \frac{w_r L}{R} V_{in} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_L = Q V_{in}}$$

El voltaje en el capacitor es:

$$V_C = \frac{1}{w_r C} \cdot I_{in} = \frac{1}{w_r C} \cdot \frac{V_{in}}{R}$$

Teniendo que:  $Q = \frac{1}{w_r C R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_C = Q V_{in}}$

#### IV. Otros circuitos filtros

##### a. Filtro eliminador de banda:

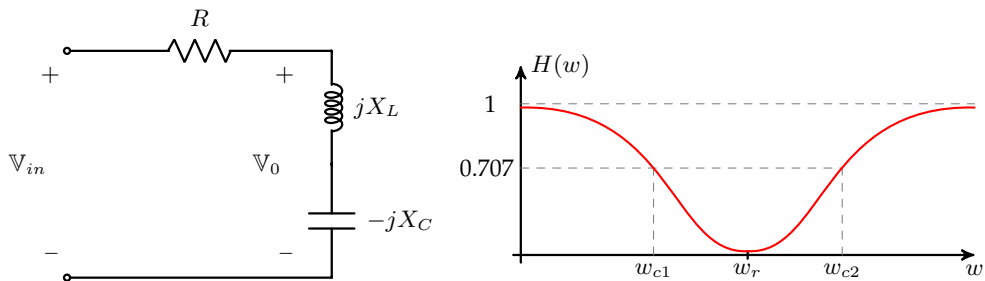


Figura 5.7. Filtro eliminador de banda

**b. Filtros doblemente resonantes:**

Son aquellos que presentan resonancia serie a una frecuencia que se desea dejar pasar o censar y presenta una resonancia paralelo a la frecuencia que se desea bloquear.

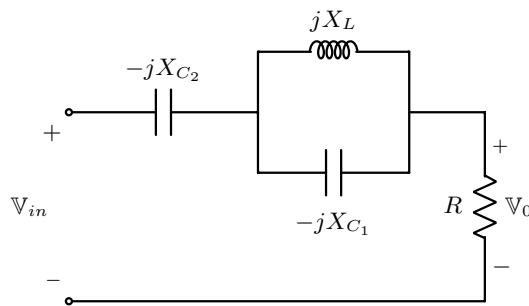
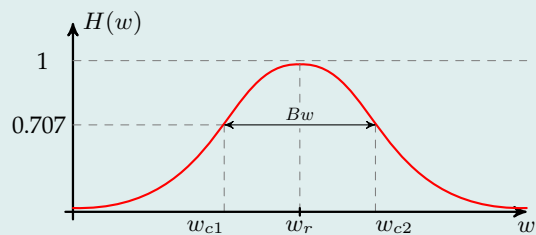
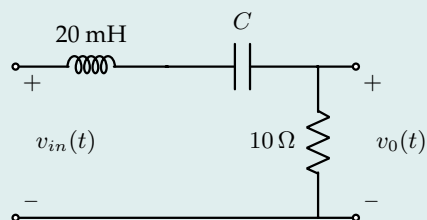


Figura 5.8. Filtro doblemente resonante

**Ejemplo 5.1:** Se desea censar  $20\text{ KHz}$  y bloquear  $5\text{ KHz}$  y  $30\text{ KHz}$ . Calcular el valor de  $C$ ,  $Q$ ,  $f_{c1}$ ,  $f_{c2}$  y  $v_0(t)$  si:

$$v_{in}(t) = 0,5 \sin(2\pi 5000t) + 1,2 \sin(2\pi 20000t) + 0,8 \sin(2\pi 30000t)$$



**Solución:**

El ejercicio nos da el valor de la frecuencia de resonancia:  $w_r = 2\pi \cdot 20000 \text{ [rad/s]}$

Calculando los parámetros del filtro:

$$\text{De: } w_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ [rad/s]} \implies C = \frac{1}{L w_r^2} \implies \boxed{C = 3,16 \text{ nF}}$$

★Cálculo de  $Bw$ :

$$Bw = \frac{R}{L} = \frac{10 \Omega}{20 \cdot 10^{-3} \text{ H}} = 500 \text{ [rad/s]} \implies Bw = 79,58 \text{ Hz}$$

★Cálculo del factor de calidad  $Q$ :

$$Q = \frac{w_r}{Bw} = \frac{40000\pi \text{ [rad/s]}}{500 \text{ [rad/s]}} \implies \boxed{Q = 80\pi}$$

Nótese que:  $80\pi \gg 10$

★Cálculo de las frecuencias de corte:

- Método aproximado  $Q > 10$

$$w_{c1} = w_r \left( -\frac{1}{2Q} + 1 \right) = 40000\pi \left( -\frac{1}{2 \cdot 80\pi} + 1 \right)$$

$$w_{c1} = w_r \left( \frac{1}{2Q} + 1 \right) = 40000\pi \left( \frac{1}{2 \cdot 80\pi} + 1 \right)$$

Teniendo que:

$$w_{c1} = 125413,7 \text{ [rad/s]} \implies f_{c1} = 19,9 \text{ KHz}$$

$$w_{c2} = 125913,7 \text{ [rad/s]} \implies f_{c2} = 20,039 \text{ KHz}$$

- Método exacto:

$$w_{c1} = -\frac{40000\pi}{2 \cdot 80\pi} + \left[ \left( \frac{40000\pi}{2 \cdot 80\pi} \right)^2 + (40000\pi)^2 \right]^{1/2} = 125413,96 \text{ rad/s}$$

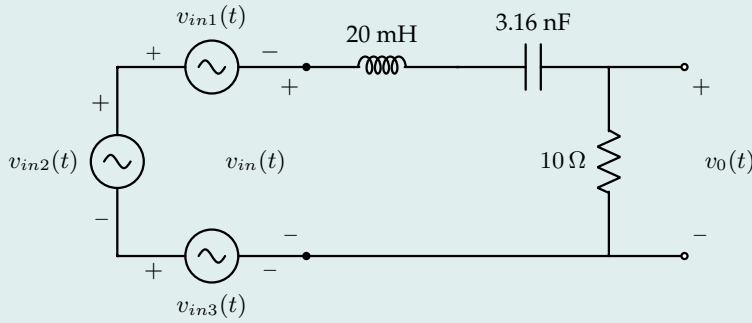
$$w_{c2} = \frac{40000\pi}{2 \cdot 80\pi} + \left[ \left( \frac{40000\pi}{2 \cdot 80\pi} \right)^2 + (40000\pi)^2 \right]^{1/2} = 125913,95 \text{ rad/s}$$

Llegando a:

$$\boxed{f_{c1} = 19,96 \text{ KHz}} \quad ; \quad \boxed{f_{c2} = 20,03 \text{ KHz}}$$

★Cálculo de  $v_0(t)$ :

Se puede observar que la fuente  $v_{in}(t)$  posee diferentes frecuencias, esto será aprovechado para representar  $v_{in}(t)$  haciendo la suma de varias fuentes como se ve en el circuito.



El voltaje de salida  $v_0(t)$  tendrá la siguiente forma:

$$v_0(t) = v_{01}(t) + v_{02}(t) + v_{03}(t)$$

Donde cada componente se determina usando el principio de superposición.

Para cualquier frecuencia  $w_n$  se sabe que:

$$\frac{V_0(w_n)}{V_{in}(w_n)} = \mathbb{H}(w_n)$$

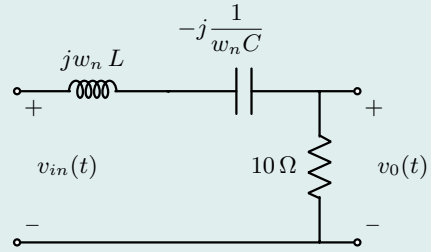


Figura 5.9. Circuito en el dominio de la frecuencia

Donde:

$$V_0(w_n) = \mathbb{H}(w_n) \cdot V_{in}(w_n)$$

$$\mathbb{H}(w_n) = \frac{R}{\left[ R^2 + \left( w_n L - \frac{1}{w_n C} \right)^2 \right]^{1/2}} \angle -\tan^{-1} \left( \frac{w_n L - \frac{1}{w_n C}}{R} \right)$$

$$V_0(w_n) \angle \theta_{V_0}(w_n) = H(w_n) \cdot V_{in}(w_n) \angle \theta_H(w_n) + \theta_{V_{in}}(w_n)$$

En la siguiente tabla se reemplazan los valores de  $w_n$  para  $n = \{1, 2, 3\}$  en cada una de las ecuaciones para hallar la respuesta final de  $v_0(t)$ :

$n$	$w_n [\text{rad/s}]$	$H(w_n)$	$\theta_H(w_n)^\circ$	$V_{in}(w_n) \text{ V}$	$\theta_{V_{in}}(w_n)^\circ$	$V_0(w_n) \text{ V}$	$\theta_{V_0}^\circ$
1	$10000\pi$	0.016	89.93	0.5	0	$8 \cdot 10^{-3}$	89.93
2	$40000\pi$	1	0	1.2	0	1.2	0
3	$60000\pi$	0.005	-89.93	0.8	0	$4 \cdot 10^{-3}$	-89.93

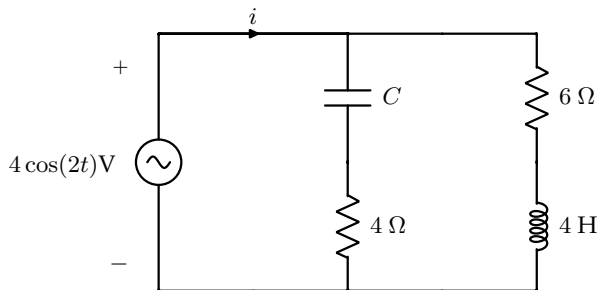
De lo anterior se tiene:

$$v_0(t) = \underbrace{[8 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi 5000t + 89,93^\circ)]}_{\text{Frecuencia bloqueada}} + 1,2 \sin(2\pi 20000t) + \underbrace{4 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi 30000t - 89,93^\circ)}_{\text{Frecuencia bloqueada}} \text{ V}$$

De  $v_0(t)$  se puede observar que los voltajes señalados son cercanos a cero, lo que nos dice que estos voltajes están siendo filtrados.

### 5.3. Ejercicios propuestos

1. En el circuito de la figura determine:
  - a) El valor de  $C$  para el circuito en resonancia.
  - b) La expresión de la corriente  $i$  cuando el circuito está en resonancia.



*Respuesta:* a)  $C = 0,3454 \text{ F}$ ; b)  $i = 1,12 \cos(2t) \text{ A}$

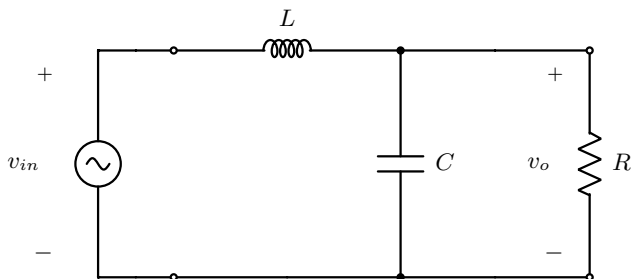


Figura 5.10. Circuito problemas 2 y 3

2. Determine la expresión para la frecuencia de corte  $\omega_c$  del filtro pasa bajo de la figura 5.10 si  $R = \sqrt{\frac{L}{2C}}$ . Luego, usando la expresión obtenida para  $\omega_c$  determine los valores de  $C$  y  $R$  si la frecuencia de corte es 582 Hz y  $L = 560$  mH.

*Respuesta:*  $C = 0,13355 \mu\text{F}$ ;  $R = 1448 \Omega$

3. En el circuito de la figura 5.10,  $L = 10$  mH;  $C = 1 \mu\text{F}$  y  $R = 70,71 \Omega$ . Determine:  
a) la frecuencia de corte en Hz del filtro; b) El valor de la frecuencia de la fuente en Hz para máxima tensión en la resistencia.

*Respuesta:* a)  $f_c = 1,591$  kHz; b) 0 Hz

4. Diseñar un filtro que bloquee una frecuencia de 4000 Hz con un factor de calidad de 10; se dispone de una inductancia de 20 mH, la cual tiene una resistencia interna de  $26 \Omega$





# A

## Transformaciones y teoremas útiles

En ocasiones para resolver circuitos eléctricos es necesario la utilización de algunas leyes y teoremas, así como hacer transformaciones; en este apéndice se verán algunas de estas técnicas que a lo largo de los ejercicios del libro son necesarias para un resultado óptimo, pero para no perder el ritmo del libro no se incluyen directamente.

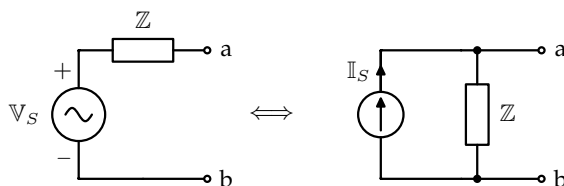
### A.1. Transformación de fuentes

Un circuito equivalente es aquel cuyas características de corriente y voltaje son idénticas a las del circuito original. En algunos casos es necesario hacer una transformación de fuentes ya que para métodos como por ejemplo el de mallas, es conveniente que todas las fuentes del circuito a analizar sean de voltaje, por esto si el circuito tiene alguna fuente de corriente se puede hacer la transformación a una de voltaje para poder aplicar dicho método.

La transformación de fuentes, permite sustituir una fuente de tensión en serie con una impedancia por una fuente de corriente en paralelo con la misma impedancia, o viceversa.

Los dos circuitos de la figura A.1 son equivalentes, en tanto tengan la misma relación tensión-corriente en las terminales a-b. En consecuencia, la transformación de fuente requiere que:

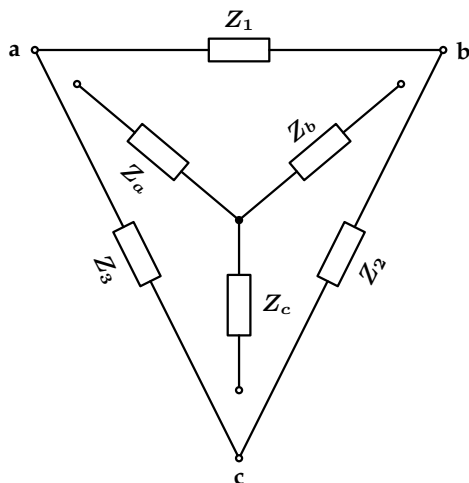
$$\mathbb{V}_S = \mathbb{I}_S \cdot Z \quad \text{o} \quad \mathbb{I} = \frac{\mathbb{V}_S}{Z}$$



**Figura A.1.** Transformación de fuentes

## A.2. Conversión delta-estrella y estrella-delta

La identificación de combinaciones en paralelo y serie de elementos de circuito, a menudo propicia una reducción importante de la complejidad de un circuito. En situaciones en las que no existe tales combinaciones, muchas veces se recurre a las transformaciones de fuente para posibilitar dichas simplificaciones. Existe otra técnica útil, llamada conversión  $\Delta - Y$  (delta-estrella) que surge de la teoría de redes.



### A.2.1. Conversión de triángulo a estrella

De la figura A.2, se dice que el dipolo de cualquier rama de la red en Y es igual al producto de los dos lados adyacentes de la red en Δ dividido entre la suma de los tres dipolos de la Δ. Las formulas para convertir de Δ a Y son:

Figura A.2. Representación de dipolos conectados en delta y estrella

$$Z_a = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad Z_b = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \quad Z_c = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

### A.2.2. Conversión de estrella a triángulo

De la figura A.2, se dice que un dipolo de cualquier lado de la red en Δ es igual a la suma de los dipolos de la red en Y multiplicados de dos en dos y divididos por el dipolo opuesto de la red en Δ. Las formulas para convertir de Y a Δ son:

$$Z_1 = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_c} \quad Z_2 = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_a} \\ Z_3 = \frac{Z_a \cdot Z_b + Z_b \cdot Z_c + Z_c \cdot Z_a}{Z_b}$$

## A.3. Método de Cramer

El método de Cramer permite encontrar las incógnitas de un sistema de ecuaciones linealmente independientes por medio de su determinante, se debe aplicar a sistemas que cumplan con las siguientes condiciones:

- \* El número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas
- \* El determinante de la matriz de coeficientes debe ser distinto de cero.

Por el ejemplo para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + & \cdots + & a_{nn}x_n = & b_n \end{array}$$

El método de Cramer establece que para este sistemas de ecuaciones la solución es:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad ; \quad \dots \quad ; \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

donde las  $\Delta$  son los determinantes dados por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Cuando  $\Delta = 0$ , el conjunto de ecuaciones no tiene solución única, ya que éstas son linealmente dependientes.

Para nuestro caso el método de Cramer nos resulta útil cuando se tiene un sistema de ecuaciones y solo se quiere hallar el valor de una incógnita sin la necesidad de resolver todo el sistema.

## A.4. Deducción de las inductancias propias y mutua de dos bobinas que pasan por un mismo núcleo

Se tomara como referencia el transformador de la figura 4.1. De la sección ?? se vio que:

$$k = \sqrt{k_{12}k_{21}} \quad \text{donde} \quad k_{12} = \frac{\phi_{12}}{\phi_2} \quad ; \quad k_{21} = \frac{\phi_{21}}{\phi_1}$$

Sabiendo que:  $\phi_{11} = \phi_{\ell 1} + \phi_{21}$  y  $\phi_{22} = \phi_{\ell 2} + \phi_{12}$  entonces:

$$k = \sqrt{\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} \cdot \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}} \tag{A.1}$$

• Cuando el acople es perfecto:

$$\begin{aligned} \phi_{\ell 1} = 0 & \implies \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = 1 \\ \phi_{\ell 2} = 0 & \implies \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} = 1 \end{aligned} \implies \boxed{k = 1}$$

• Cuando no hay acople:

$$\phi_{21} = 0 \quad ; \quad \phi_{12} = 0 \implies \boxed{k = 0}$$

De la ley de Ampere<sup>1</sup> se tiene:  $\phi = \frac{N i}{\mathfrak{R}}$  donde  $\mathfrak{R}$  es la reluctancia del núcleo ferromagnético.

Se tiene que:  $\phi_{21} = \frac{N_1 i_1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \quad ; \quad \phi_{12} = \frac{N_2 i_2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}}$

Luego:

$$\phi_{21} \cdot \phi_{12} = \frac{N_1 * N_2 i_1 i_2}{\mathfrak{R}^2}$$

Para los flujos propios:

$$\phi_{11} = \phi_{\ell 1} + \phi_{21} = \frac{N_1 i_1}{\mathfrak{R}_{\ell 1}} + \frac{N_1 i_1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \quad ; \quad \phi_{22} = \phi_{\ell 2} + \phi_{12} = \frac{N_2 i_2}{\mathfrak{R}_{\ell 2}} + \frac{N_2 i_2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}}$$

De lo anterior se llega a:

$$\phi_{11} = N_1 i_1 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right) \quad ; \quad \phi_{22} = N_2 i_2 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 2}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right)$$

Reemplazando lo anterior en la ecuación (A.1) se tiene:

$$k = \left[ \frac{\frac{(N_1 * N_2)^2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}^2} \cancel{i_1 i_2}}{N_1^2 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right) \cdot N_2^2 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 2}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right) \cdot \cancel{i_1 i_2}} \right]^{1/2}$$

Teniendo que:  $N \phi = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} i \quad y \quad \lambda = L i$

Se obtienen los valores de las inductancias:

$$\begin{aligned} L_1 &= N_1^2 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 1}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right) \\ L_2 &= N_2^2 \left( \frac{1}{\mathfrak{R}_{\ell 2}} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}} \right) \end{aligned} \quad \boxed{M = \frac{N_1 * N_2}{\mathfrak{R}_{\text{núcleo}}}}$$

---

<sup>1</sup>  $\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_o I$

# Bibliografía

- [1] HAYT, William H. DURBIN, et al. Análisis de circuitos en ingeniería. Séptima edición. México : Mcgraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., c2007. 856 p.
- [2] FRAILE MORA, Jesús; MORA, Jesús Fraile. Electromagnetismo y circuitos eléctricos. Tercera edición. España: Rugarte. S.L. - Puerto de Arlabán. 33-28018 Madrid, 1995. 800 p.
- [3] SADIKU, MATTHEW N. O. y ALEXANDER, CHARLES K. Fundamentos de circuitos eléctricos. Tercera edición. México : Mcgraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V., c2006. 901 p.
- [4] MARULANDA OLARTE, Milton César; RUIZ CRUZ, Uriel; VÁSQUEZ CEBALLOS, Julio César. Libro guía de circuitos eléctricos II con aplicaciones en matlab. Trabajo de grado (Ingeniero Electricista). Pereira-Risaralda. Universidad Tecnológica de Pereira. Facultad de Ingenierías Programa de Ingeniería Eléctrica. 2005. 336 p.
- [5] POWELL, Ray G. Introduction to electric circuits. Great Britain: By Arnold, a member of the Hodder Heandline Group, 338 Euston Road, London, 1995. 249 p.
- [6] GLOVER, J. Duncan, and MULUKUTLA S. Sarma. Análisis y diseño de sistemas de potencia. Tercera edición. Ciencias e Ingeniería, 2002. 647 p.
- [7] Working with Phasors and Using Complex Polar Notation in MATLAB. Tony Richardson. University of Evansville, 2014. Disponible en: [http://csserver.evansville.edu/~richardson/courses/Tutorials/complex\\_numbers/matlab/matlab.pdf](http://csserver.evansville.edu/~richardson/courses/Tutorials/complex_numbers/matlab/matlab.pdf)
- [8] KARRIS T. Steven. Circuit Analysis I with MATLAB Computing and Simulink \ SimPowerSystems Modeling. U.S.A : Orchard Publications, 39510 Paseo Padre Parkway, Fremont, California, 2009. 612 p.
- [9] NAHVI, Mahmood; EDMINISTER, Joseph A. Theory and Problems of Electric Circuits. Cuarta edición. U.S.A : The McGraw-Hill Companies, 2003. 469 p.

# Índice alfabético

- Acoplamiento magnético, 131
- Acople, 138, 143
- Acople de impedancias, 150
- Acople perfecto, 158, 194
- Admitancia, 27
- Autoinductancia, 134, 143
- Balance de potencia, 105, 112
- Banco de condensadores, 107, 108
- Bifásico, 88
- Bobina, 87, 132, 137
- Campo magnético, 87, 131
- Capacitor, 24
- Carga
  - balanceada, 99
  - desbalanceada, 91, 111
- Circuito
  - en vacío, 46
  - equivalente, 191
  - equivalente monofásico, 100
  - magnético, 133
  - plano, 34
- Coefficiente de acople, 137
- Conductor neutro, 90, 99
- Conexión
  - aditiva, 139
  - en delta, 88
  - en paralelo, 31
  - en Y, 87
  - serie, 31
  - sustractiva, 139
- Conjugado, 8
- Conversión, 192
- Conversión delta-estrella, 55
- Coordenadas
  - cartesianas, 6
  - polares, 6
- Corriente de prueba, 49
- Corrientes
  - de fase, 101, 102
  - de línea, 99, 101
  - de malla, 37
- Cortocircuito, 46, 51
- Cramer, 44, 192
- Cuadripolo, 178
- Derivada, 16
- Determinante, 192
- Diagrama fasorial, 32, 74, 78, 111
- Dipolos
  - en paralelo, 30
  - en serie, 29
- Divisor de tensión, 48
- Ecuación compleja, 10, 13
- Eficiencia, 106, 108
- Enlaces de flujo, 133
- Equivalente
  - de Norton, 50
  - de Thévenin, 49
  - monofásico, 100, 110, 114
- Espiras, 132
- Factor de calidad, 183
- Factor de potencia, 65, 71, 73, 104
- Faraday, 132
- Fasor, 15, 92
- Fasor de referencia, 101
- Fasores, 32
- Ferromagnético, 132, 143, 194
- Filtro, 178

- Flujo de dispersión, 132
- Flujo magnético, 132
- Flujos de dispersión, 161
- Forma
  - exponencial, 8
  - polar, 58
  - rectangular, 58
- Frecuencia, 178
  - angular, 15
  - de corte, 180
  - de resonancia, 183, 186
- Fuente
  - dependiente, 49
  - trifásica, 92
- Función
  - compleja, 14
  - de transferencia, 178
  - periódica, 67
- Generadores trifásicos, 92
- Grados
  - eléctricos, 92
  - mecánicos, 92
- Histéresis, 162
- Impedancia, 24
  - de dispersión, 166
  - de Norton, 50
  - de Thévenin, 47
- Inductancia, 22
  - mutua, 137
- Inductancias acopladas, 136, 140, 153
- Inverso, 9, 27
- Kirchhoff, 17, 34, 35, 38, 40, 81, 89
- Ley
  - de Ampere, 133
  - de Ohm, 22
  - del coseno, 7
  - del seno, 11
- Marcas de polaridad, 136, 137, 143
- Matlab, 12, 56
- Matriz de acople, 138, 142
- Millman, 99
- Máxima transferencia, 148
- Método
  - de corrientes de mallas, 34
  - de voltajes de nodo, 40
  - del triángulo, 97, 102
- Método fasorial, 15, 19, 26, 34, 36
- Nodo de referencia, 40, 41
- Norton, 45, 46
- Núcleo, 161, 194
- Número complejo, 6
- Parámetros, 162
- Permeabilidad magnética, 132, 143, 156
- Plano complejo, 14
- Polifásicos, 87
- Por unidad, 171
- Potencia
  - activa, 65, 72, 103, 105
  - aparente, 65, 72, 105
  - aparente trifásica, 104
  - compleja, 70
  - compleja trifásica, 105
  - eléctrica, 106, 108
  - entregada, 63
  - instantánea, 63, 68, 103
  - mecánica, 108
  - media, 104
  - negativa, 63
  - positiva, 63
  - promedio, 68
  - reactiva, 65, 73, 105
  - reactiva trifásica, 104
  - trifásica compleja, 104
  - útil, 146
- Primario, 132, 145
- Principio de conservación de la potencia, 103
- Principio de superposición, 50
- Propiedad
  - de igualdad, 17
  - de linealidad, 17
  - fundamental, 18
- Prueba

- de circuito abierto, 163
- de cortocircuito, 162
- Pérdidas, 162
- Rama
  - de dispersión, 162
  - de excitación, 162, 163, 168
- Reactancia capacitiva, 25
- Reactancia inductiva, 25, 136
- Reactivos, 73
- Recíproco, 9
- Red lineal, 46
- Regulación de voltaje, 69, 75, 78, 168
- Relación
  - de corrientes, 144
  - de transformación, 162
  - de voltajes, 143
- Reluctancia, 132, 143, 194
- Representación
  - cartesiana, 6, 28
  - exponencial, 6, 12
  - polar, 6, 28
  - trigonométrica, 6
- Resistencia, 21
- Resonancia, 177, 184
- Régimen permanente, 1, 15, 19, 34, 65
- Secuencia
  - negativa, 92, 93, 96
  - positiva, 92, 95
- Secundario, 132, 145
- Sistema
  - balanceado, 104
  - monofásico trifilar, 90
  - trifásico, 92, 96, 99
- Sistemas trifásicos, 103
- Solenoides, 135
- Solver, 13
- Susceptancia capacitiva, 29
- Susceptancia inductiva, 28
- Supermalla, 39
- Supernodo, 43
- Tensiones de línea, 96
- Tensión
  - de fase, 93, 94
  - de línea, 94
- Teorema de Millman, 89
- Thévenin, 45, 148
- Transformación de fuentes, 38, 191
- Transformador, 131, 138, 143, 171
  - elevador, 145
  - ideal, 144
  - monofásico, 155, 161
  - real, 161
  - reductor, 145, 163
- Triángulo de potencia, 73, 104, 109
- Valor
  - eficaz, 67, 101
  - rms, 93
- Valores
  - pico, 63, 69
  - rms, 69
- Vatio, 65
- Voltaje de Thévenin, 48
- Voltaje inducido, 132
- Voltajes
  - de fase, 93
  - de línea, 93
- Voltio-amperio, 65
- Voltio-amperio reactivo, 65